

سری ها

مثال ای از اعداد که با هم جمع می شوند برای نشان دادن یک سری از اعداد (ساده)

استفاده می شود و به صورت کلی $\sum_{i=1}^n a_i$ نمایش داده می شود

کاملاً آسان

مثال حاصل سری $\sum_{i=1}^5 i$ را به دست آورید

$$\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=-1}^3 i = \frac{-1}{2(-1)-1} + 0 + \frac{1}{2(1)-1} + \frac{2}{2(2)-1} + \frac{3}{2(3)-1} = \frac{13}{5}$$

انواع سری ها

سری هندسی ✓

۱. سری هارمونیک ✓

۲. سری متناوب ✓

۳. P-سری ✓

۴. سری تلسکوپی

ازفون های همگرایی سری ها

۱. ازفون اول و وائرایی

۲. ازفون نسبت

۳. ازفون ریشه

۴. از قون اشتراک

۵. از قون مقاسه ای

سری هندسی

هر سری به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ را یک سری هندسی می نامیم.
 (توجه: a و r می توانند هر چه باشند)

$$۱) \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = a = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 2 \quad \text{مگر } r = \frac{1}{4}$$

a را باید به دست آورید

$$۲) \sum_{n=1}^{\infty} 4 (2)^n = a = 4 \quad \text{و اگر } r = 2$$

$$۳) \sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad a = \frac{5}{2} \quad \text{مگر } r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{1} = 5$$

نکته: در سری های هندسی

اگر $|r| < 1$ مگر $\frac{a}{1-r}$ است

اگر $|r| \geq 1$ سری واگر است

p - سری

هر سری به فرم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را یک p -سری می نامیم

اگر $p > 1$ مگر است

اگر $p \leq 1$ واگر است

$$۱) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{مگر است } 3 > 1$$

$$۲) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

مگر است $\frac{3}{2} > 1$

نکته: اگر یک سری بسیار طولانی و پیچیده بود برای حل از قانون **۳)** میتوان استفاده می کنیم یعنی بزرگترین توان ها را در نظر گرفته و از بقیه عبارات صرف نظر می کنیم

$$۳) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n^2+2)^3 \sqrt[3]{n^2+2n+1}} \sim \frac{n^2}{n^2 \cdot n^{\frac{1}{3}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \quad p = \frac{2}{3} < 1 \quad \text{و اگر}$$

$$۴) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9\sqrt{n} \cdot \sqrt[3]{n}}{n+1} \sim \frac{9 \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}}}{n^1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9 \cdot n^{\frac{5}{6}}}{n^1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \times 9}{n \times n^{\frac{5}{6}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{n^{\frac{1}{6}}} \quad p = \frac{1}{6} < 1 \quad \text{و اگر}$$

سری متناوب

هر سری به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ را یک سری متناوب گویند که در آن

① a_n ← متوالی

② ← مثبت

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ← حد

نکته: سری متناوب همیشه همگراست!

$$۱) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

در سری های متناوب زیر سه شرط a_n را بررسی کنید

$a_n = \frac{1}{n}$ هر چیزی به جنس $(-1)^n$ است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty}$

② مثبت

① متوالی

سری هارمونیک

این سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ می باشد و همیشه واگراست

آزمون مقایسه

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با عبارات نامتناهی باشد و برای هر n داشته باشیم

$$\boxed{a_n \leq b_n} \left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ واگرا باشد آنگاه } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ واگراست} \\ \text{اگر } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ همگرا باشد آنگاه } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگراست} \end{array} \right.$$

مثال، همگرایی یا واگرایی سری های زیر را مشخص کنید

$$\text{حل: می دانیم } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \ln n \left(n \xrightarrow{\text{مکروس}} \frac{1}{\ln n} \right) \frac{1}{n} \quad \checkmark \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

سری هارمونیک است

و واگراست پس سری داده شده (صورت سوال) نیز واگراست.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n^2}$$

نکته: هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سریباشد $\sin n$ یا $\cos n$

$$\text{همیشه از نکته زیر استفاده می کنیم: } \begin{matrix} \sin n \\ \cos n \end{matrix} \in [-1, 1]$$

$$-1 < \sin n < 1$$

حل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n^2} \quad \text{پس } p > 1 \text{ پس همگراست} \quad \text{از } 0 < 1 + \sin n < 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

لذا سری داده شده نیز همگراست

سری داده شده را باید سری همگرا یا واگرا را مقایسه می‌کنیم

بر این صورت هر دو سری هم رفتارند

سری هارمونیک و واگراست

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\text{نبردن جمله}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

پس صورت سوال نیز واگراست!

پس سری است

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2+1)^5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2)^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9}$$

$p > 1$ پس همگراست و این صورت همگراست

آزمون نسبت

این آزمون در سری‌های کسری و خالتوری کاربرد دارد

فرض کنیم $\{a_n\}$ یک سری نامتناهی باشد در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ را تشکیل می‌دهیم

۱) اگر $L < 1$ همگرا

۲) اگر $L > 1$ واگرا

اگر $L = 1$ بی‌نتیجه

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$

پس همگرا

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{n+1}}{\frac{n!}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot n}{(n+1) \cdot n!} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n! \cdot n}{n+1 \cdot n!} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n > 1$

پس واگراست

آزمون سری

فرض کنید $\{a_n\}$ یک سری نامتناهی است $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ ، آنگاه

- ① $L < 1$ سری همگرا
- ② $L > 1$ سری واگرا

نکته: در سری هایی که a_n توان n باشد باقیمانده از آزمون سری می رویم

۴) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ $\xrightarrow{\text{آزمون سری}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 < 1$ همگرا

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{100}}$ $\xrightarrow{\text{آزمون سری}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^{100}}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n^{\frac{100}{n}}} \rightarrow \frac{e}{n^{\frac{100}{\infty}}} = e > 1$ واگرا

$e = 2.71$ $n^0 = 1$

سری هندسی زیر همگرا به چه عددی است

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{2n}} = \frac{3^1 \times 3^n}{4^1 \times 4^n} = \left\{ 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\} \rightarrow \frac{3}{1 - \frac{3}{4}} = 12$$

$$2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+r} n}{e^n} = a_n \left(\frac{n}{e^n} \right)'$$

$$a_n = \frac{n}{e^n} = \frac{(n' \times e^n) - (n \times e^{n'})}{(e^n)^2} = \frac{e^n - n e^n}{e^{2n}} \rightarrow 1 \times e^n$$

برای تشخیص تدریج بودن

باید از a_n مشتق بگیریم

$$= \frac{e^n (1-n)}{e^{2n}} = \frac{1-n}{e^n} = \begin{cases} a_r = \frac{1-r}{e^r} = \frac{-1}{e^r} \\ a_r = \frac{1-r}{e^r} = \frac{-r}{e^r} \end{cases}$$

اگر مشتق شده $\rightarrow$ تابع تدریجی

(1) مشتق منفی پس نزولی

$$(2) a_n \text{ مثبت} \rightarrow \frac{n}{e^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{مجهول}$$

$n \rightarrow \infty$

$$\text{L'Hop} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}} = \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(3)

برنامه ریزی خطی

به چهار سازی به تابع خطی تحت محدودیتها یا قیود از معادلات یا نامعادلات

گفته می شود هر مسأله برنامه ریزی خطی به صورت کلی زیر است

$$\min (\text{یا MAX}) \quad c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \quad \rightarrow \text{تابع هدف}$$

$\swarrow$ ضرایب هدف $\searrow$ متغیر تصمیم

$\xrightarrow{\text{قیود}}$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \geq b$$

$$u_1, u_2, \dots, u_n \geq 0$$

متغیرهای تصمیم‌گیری در تمام محدودیت‌ها (مقدور) صدق می‌کنند که به آنها نقاط شدنی گویند
مجموعه‌ی تمام نقاط شدنی را ناحیه شدنی گویند

(۲)

$$1) \min \quad 2x + 5y$$

(۱)

$$x + y = 4$$

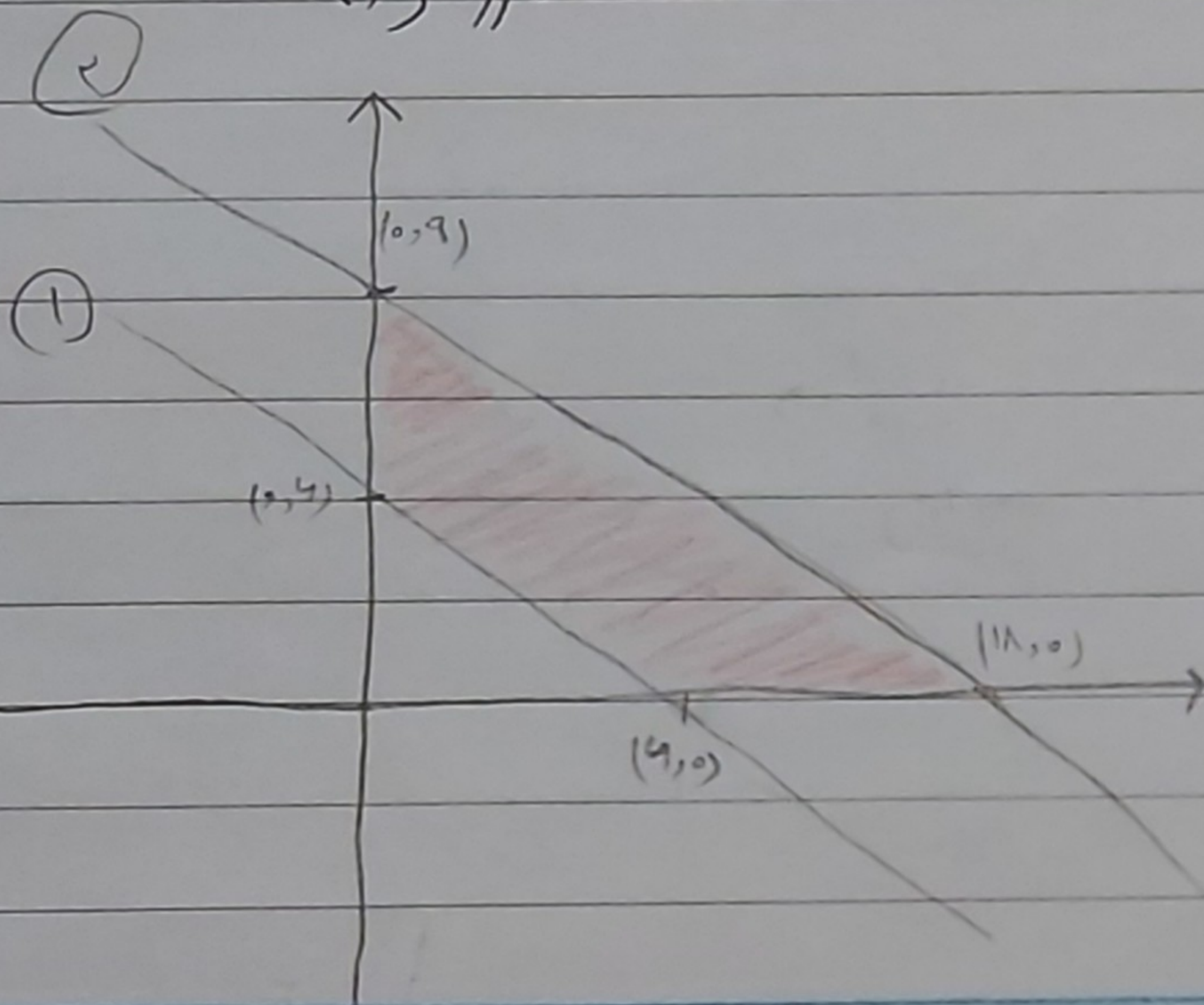
$$-x - 2y = -18$$

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ -x - 2y \geq -18 \end{cases}$$

x	y
0	4
4	0

x	y
0	9
18	0

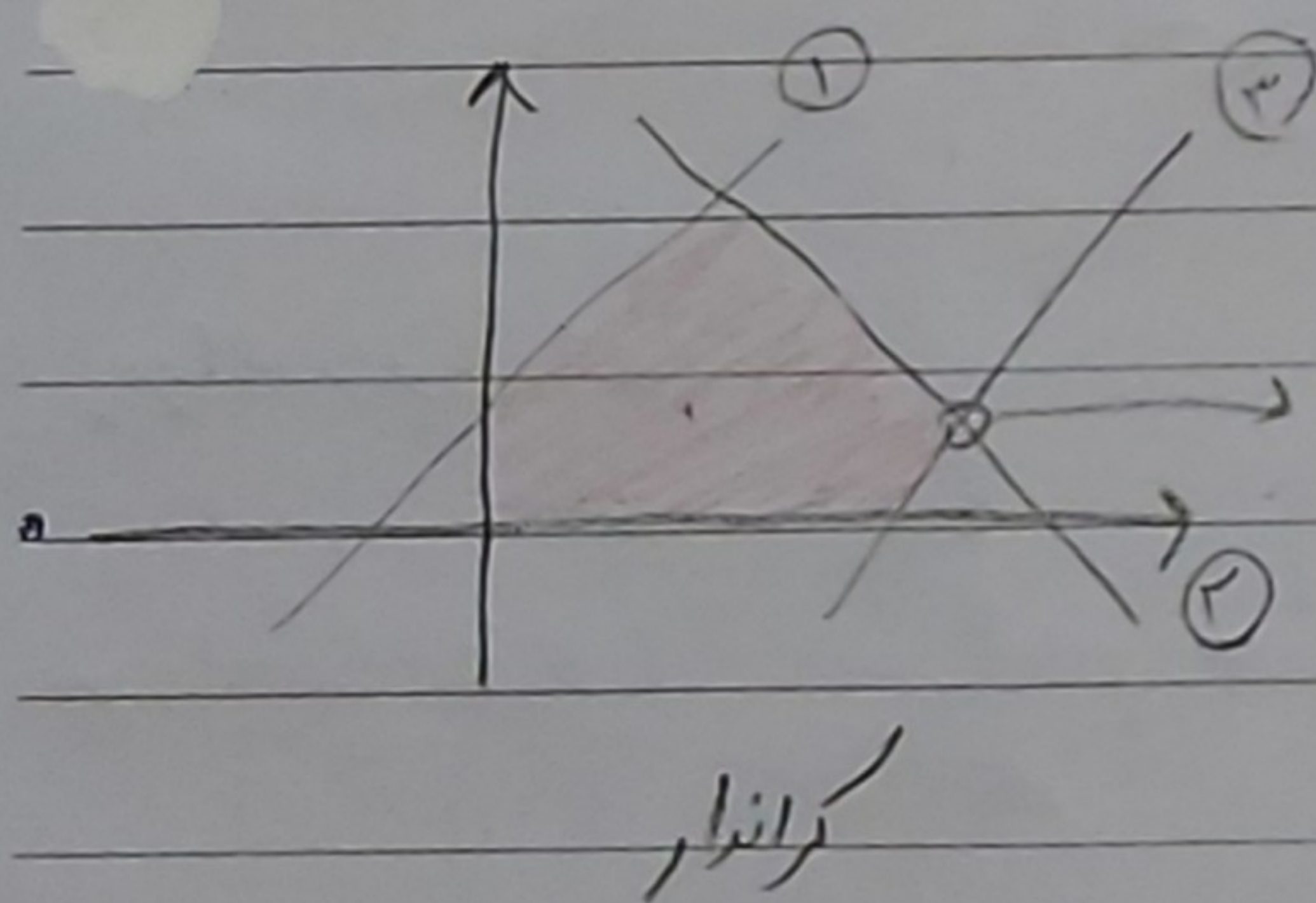
$$x, y \geq 0$$



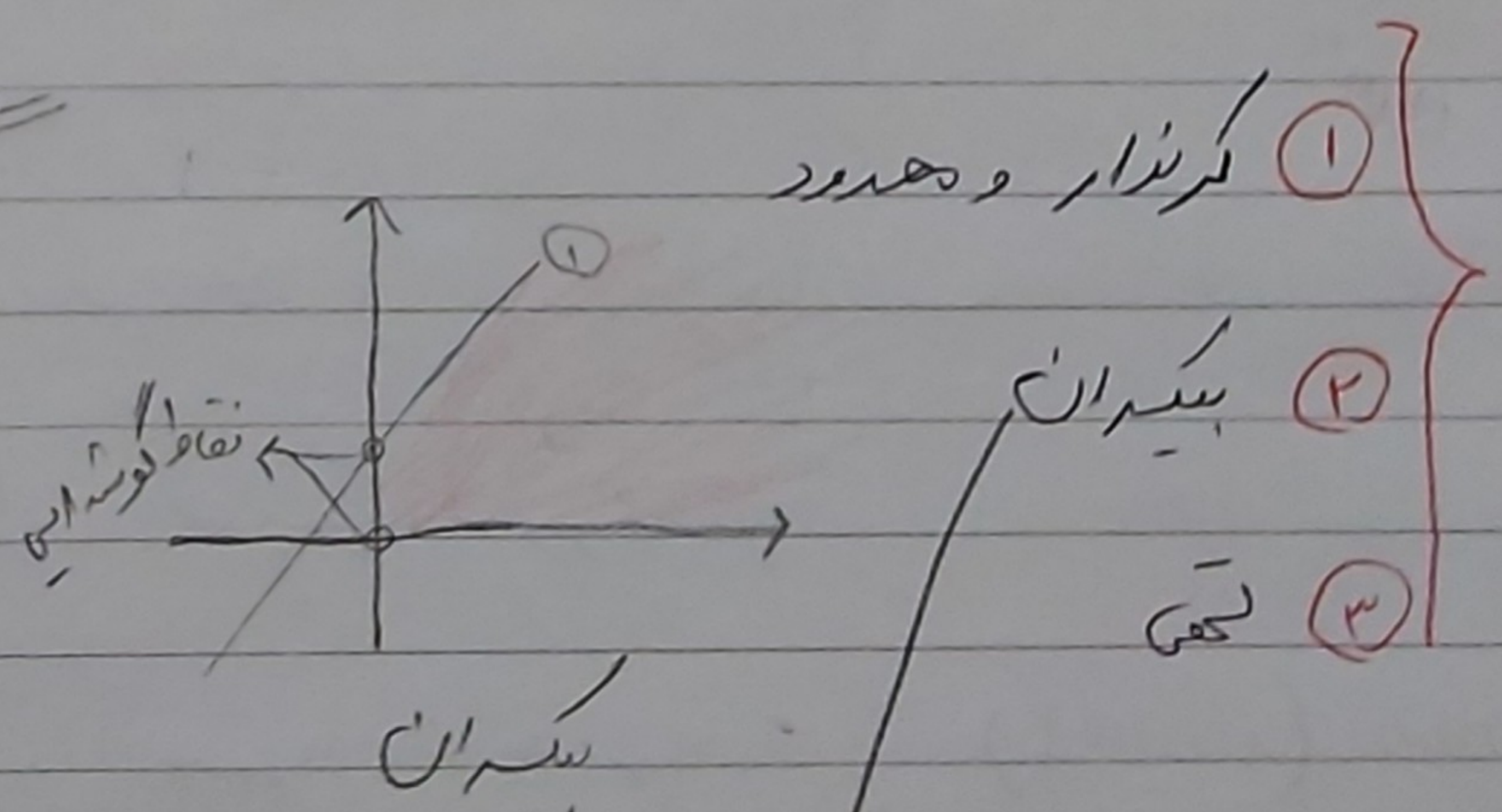
ناحیه شدنی در ربع اول است چون متغیرها نیز کمتر از صفر است

✓ کراندار و محدود

ناحیه شدنی به یکی از سه حالت زیر می‌تواند باشد:



نقطه گوشه‌ای

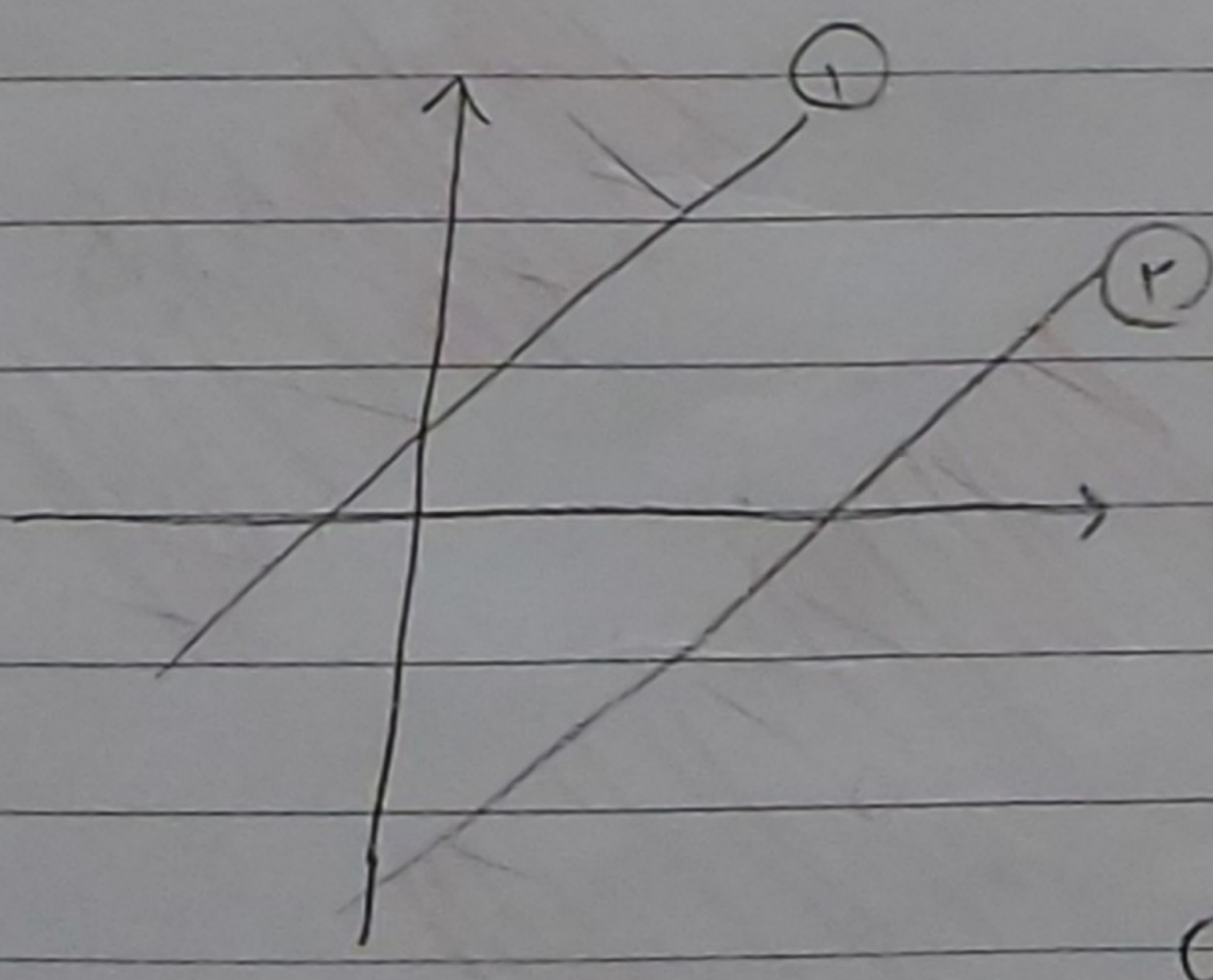


(۱) کراندار و محدود

(۲) بیکران

(۳) تهی

از زیر عرف باز است!



تهی

نکته: جواب بهینه به حالت دارد

① متناهی و منحصر به فرد: این جواب در نقاط گوشه‌ای اتفاق می‌افتد

② جواب بهینه گزین: این حالت زمانی است که تابع هدف موازی یکی از محدود است

③ جواب بهینه بی‌کران: وقتی که بردار ضرایب تابع هدف برعکس ناحیه شدنی حرکت کند

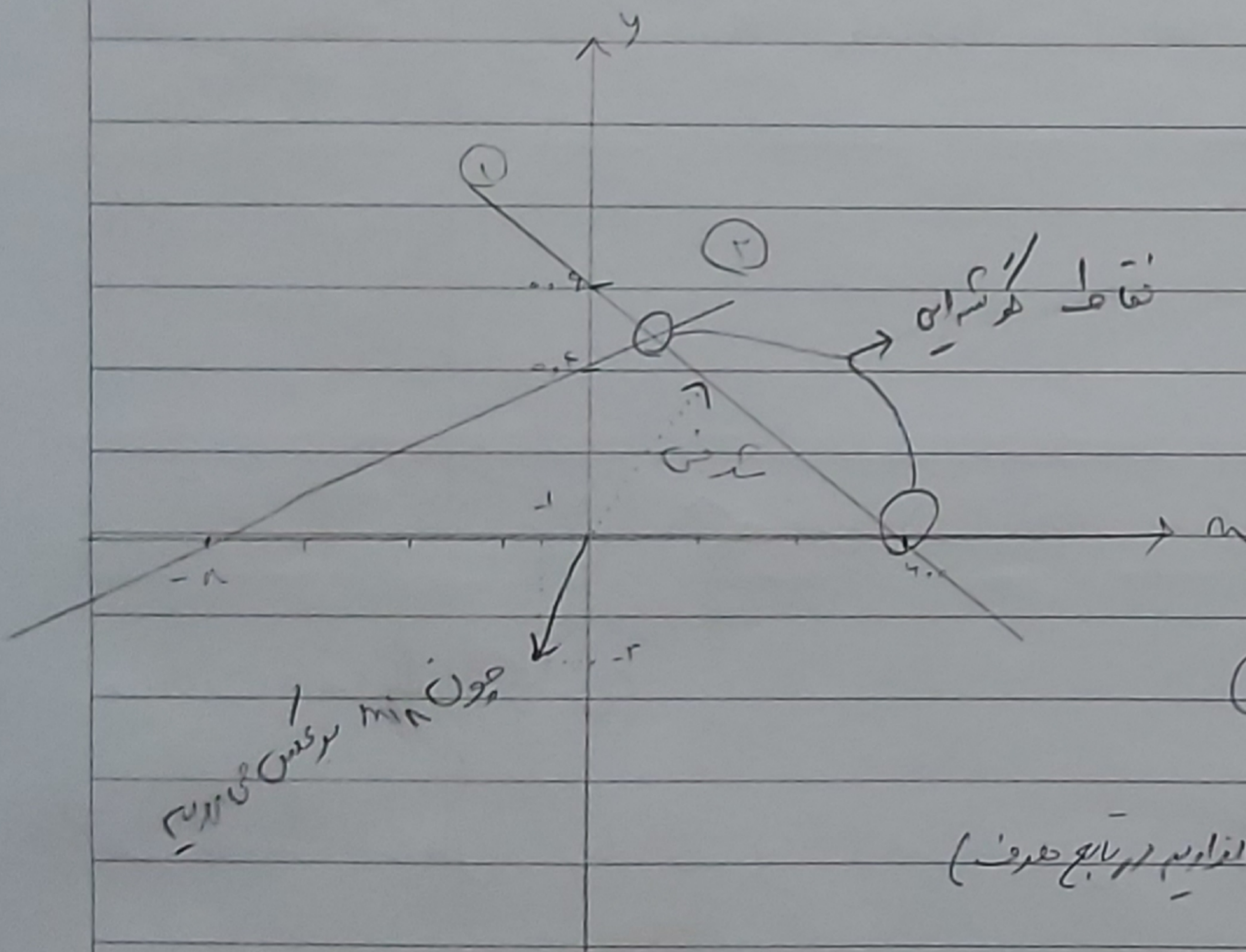
مثال: ناحیه شدنی زیر را رسم کنید و جواب بهینه را بدست آورید

$$\min z = -x - 3y \quad (1) \quad x + y = 4 \quad (2) \quad -x + 2y = 8$$

$$\text{محدود} \begin{cases} x + y \leq 4 \\ -x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

x	y
0	4
4	0

x	y
0	4
-8	0



$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$y = \frac{14}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$(4, 0) \text{ نقطه شدنی (۲)}$$

$$\text{نقطه بهینه (۱)} = \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

$$\text{جواب بهینه (یعنی کمترین تابع هدف)} \quad z = -\frac{4}{3} - 3\left(\frac{14}{3}\right) = -\frac{44}{3}$$

بعد از رسم ناحیه شدنی از روی ضرایب تابع هدف بردار آن را رسم می‌کنیم اگر مسئله

min بازی باشد خلاف جهت بردار روی ناحیه شدنی حرکت می‌کنیم آخرین نقطه‌ای که

ناحیه شدنی تمام شود همان جواب بهینه است و اگر مسئله max بازی بود در جهت بردار باید حرکت کرد

$$\rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right) \text{ اگر } -\frac{44}{3}$$

$$\text{چون min جواب می‌شود } -\frac{44}{3} \text{ یعنی } -14.67$$

$$-6 = \text{اگر } (4, 0)$$

Subject

Date

۳۰ شهریور

$$2) \text{ MAX } z = 2x + 3y$$

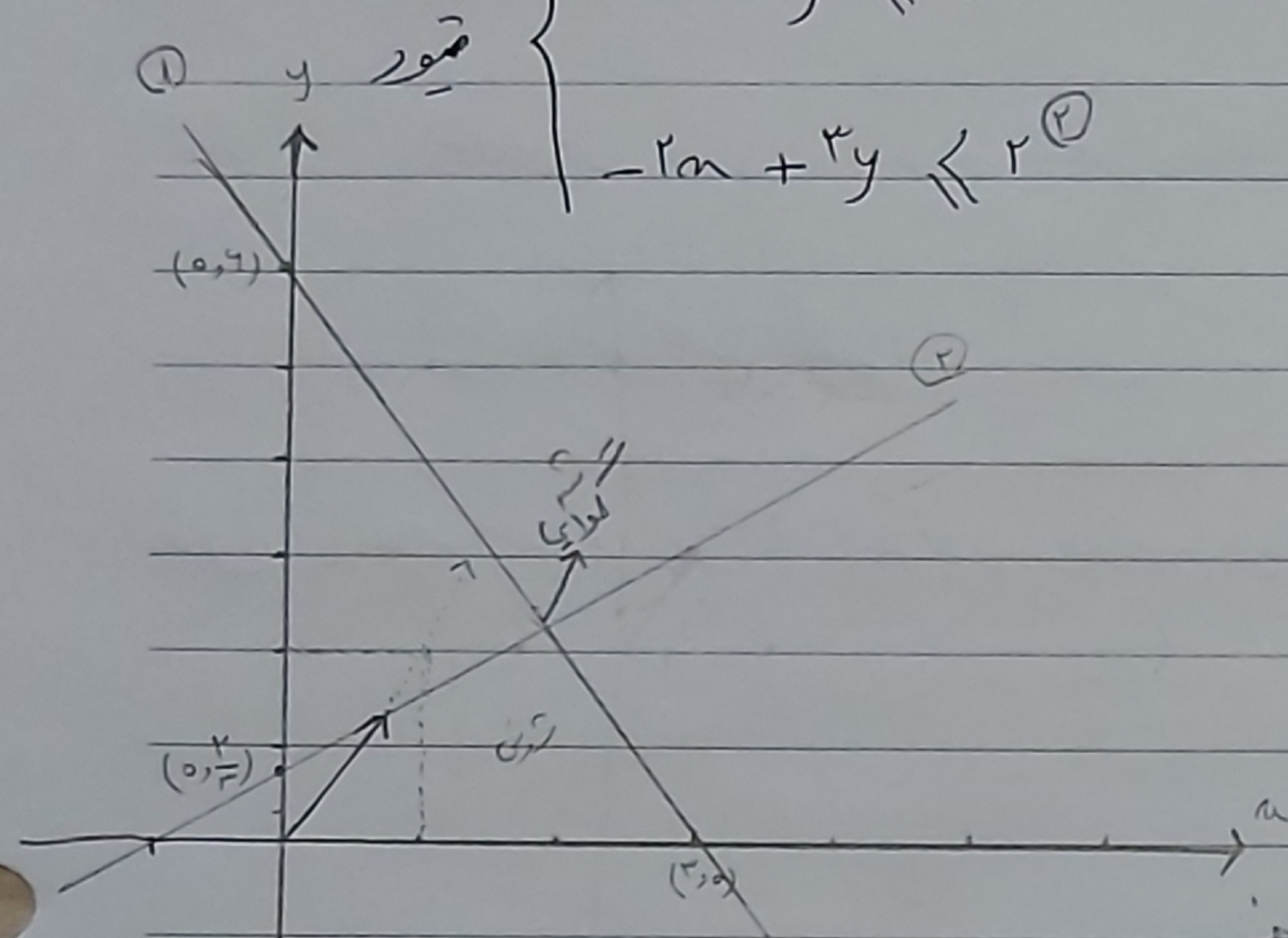
$$2x + y = 4$$

$$-2x + 3y = 2$$

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 & (1) \\ -2x + 3y \leq 2 & (2) \end{cases}$$

x	y
0	4
2	0

x	y
0	$\frac{2}{3}$
-1	0



در نقطه

$$(1, 2)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$$

در نقطه

$$-2x + 3y = 2$$

$$4y = 8 \quad y = 2$$

$$2x + 2 = 4 \quad 2x = 4 - 2 \quad x = 1$$

$$y = 2$$

$$x = 1$$

در نقطه

$$2 + 3(2) = 8$$

در نقطه

$$(1, 2) \quad z = 8$$

نتیجه:

چون max می شود جواب (1, 2)

$$(0, \frac{2}{3}) \quad z = \frac{4}{3}$$