مثال: اگر تابع چگالی متغیر تصادفی x مفروض باشد:

$$f(x)=\begin{cases}6(x)(1-x) & 0<x<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

الف) احتمال اینکه $P(x>\frac{1}{3})$ باشد.

تذکر مهم!

$$P(x)=F(x)=\int_a^b f(x)dx$$

ب) احتمال اینکه $P(x=\frac{1}{3})$ باشد.

ج) $P(\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2})$

جواب قسمت «الف»:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}6(x)(1-x)\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}6x-6x^2\,dx=\left[\frac{6x^2}{2}-\frac{6x^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}=\left[\frac{6(1)^2}{2}-\frac{6(1)^3}{3}\right]-\left[\frac{6(\frac{1}{3})^2}{2}-\frac{6(\frac{1}{3})^3}{3}\right]$$

جواب قسمت «ب»:

احتمال برابر با صفر است، زیرا $x=\frac{1}{3}$ می‌باشد.

جواب قسمت «ج»:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}6(x)(1-x)\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{1}6x-6x^2\,dx=\left[\frac{6x^2}{2}-\frac{6x^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{6(\frac{1}{2})^2}{2}-\frac{6(\frac{1}{2})^3}{3}\right]-\left[\frac{6(\frac{1}{3})^2}{2}-\frac{6(\frac{1}{3})^3}{3}\right]$$

توزیع نمایی:

اگر تعداد موفقیت‌ها یا ورودی‌ها دارای توزیع پواسون باشند، زمان بین موفقیت‌ها یا ورودی‌ها متوالی دارای توزیع نمایی است که معمولا در این بحث به آن توزیع نمایی منفی می‌گویند.

همانطور که می‌دانیم زمان پیوسته است، بنابراین این توزیع نیز دارای توزیع پیوسته‌ای است، به طور خلاصه می‌توان تابع چگالی آن را به صورت زیر بیان کرد.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

λ پارامتر توزیع است و بیانگر متوسط (میانگین) تعداد موفقیت یا ورودی‌ها در واحد زمان است. برای محاسبه کردن احتمالات این توزیع از فرمول‌های زیر می‌توان استفاده کرد:

$$P(X=x)=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}=1-e^{-\lambda x}$$

همچنین احتمال اینکه زمان بین ۲ موفقیت یا ورودی بیش از «x» طول بکشد، رابطه زیر صادق است:

$$P(X>x)=1-f(x)=e^{-\lambda x}$$

میانگین و واریانس این توزیع عبارت است از:

آمار و احتمالات کارشناسی حسابداری

ص ۱

مثال: تابع چگالی احتمال زیر را در نظر بگیرید الف) تابع توزیع x را بیابید ب) میانگین و واریانس x را بیابید

ج) احتمال آن را بیابید که x مقداری بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ را اختیار کند

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & , x>0 \\ 0 & , \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حل الف)

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{2}} & , x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

ب) چون $\lambda=\frac{1}{2}$ ، $E(x)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ و $S^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}=4$

ج)

$$p(\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{3}{2})=F(\tfrac{3}{2})-F(\tfrac{1}{2})=(1-e^{-\frac{\frac{3}{2}}{2}})-(1-e^{-\frac{\frac{1}{2}}{2}})=$$

$$e^{-\frac{1}{4}}-e^{-\frac{3}{4}}=/78-/47=/31$$

گردآوری [illegible] کارشناس حسابداری

مثال: تخمین زده می‌شود که میانگین زمان منتهی به خرابی یک لامپ تلویزیون طبق توزیع نمایی ۳ سال می‌باشد. شرکتی این لامپ را در طول اولین سال بیمه کند برای چند درصد از بیمه نامه‌ها خسارت خواهد پرداخت

حل:

حل: $\lambda=3$ پس

$$p(x<1)=1-e^{-\frac{1}{3}\times 1}=1-e^{-\frac{1}{3}}=1-/72=/28$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

توزیع گاما:

تابع متغیر تصادفی پیوسته‌ای است که چگالی آن با تابع آن به شرح زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta^a \times a}\times x^{a-1}\times e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

در این تابع $a>0$ و $\beta>0$ و اگر a یک عدد صحیح باشد آنگاه می‌توان نوشت:

$$R(a)=(a-1)!$$

امید ریاضی و واریانس این توزیع به شرح زیر است:

$$E(X)=\frac{a}{\beta} \qquad V(X)=\frac{a}{\beta^2}$$

مثال: چنانچه $a=1$, $\beta=2$ باشد موارد زیر را محاسبه کنید

الف) توزیع آن را بنویسید.

ب) امید ریاضی و واریانس را آن چقدر است؟

جواب قسمت «الف»:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta^a \times a}\times x^{a-1}\times e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^1\times 1}\times x^{1-1}\times e^{\frac{-x}{2}}=\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

جواب قسمت «ب»:

$$E(X)=\frac{a}{\beta}=\frac{1}{2}=0/5$$

$$V(X)=\frac{a}{\beta^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

توزیع نرمال:

مهمترین توزیع پیوسته است، توزیع نرمال توزیع زنگوله شکلی است که به عبارتی این توزیع بیان می‌کند که هر یک از پدیده‌های واقعی باید دارای تقارن نسبت به خط وسط زنگونه باشد هرگونه جمع‌آوری داده‌ها و بررسی آنها مورد شک و تردید است (نظر فرانسیس) می‌باشد ولی با گذشت زمان کم‌کم این عقیده زیر سوال رفت. به هر حال اهمیت این توزیع در موارد زیر است:

الف) بسیاری از پدیده‌های طبیعی دارای این توزیع می‌باشند (عدم دخالت انسان)

ب) در بسیاری از تحقیقات در حوزه‌های مختلف بسیاری از آنها تقریبا دارای این توزیع یا متمایل به آن می‌باشند.

این توزیع چنان تعریف می‌شود:

متغیر تصادفی پیوسته x با میانگین (امید ریاضی) صفر و انحراف معیار ۱ را توزیع نرمال گویند و با استفاده از رابطه زیر می‌توان آن را محاسبه کرد.

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۲]{\pi\sigma^۲}}\times e^{-\frac{۱}{۲}\times\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^۲}$$

$X \sim N(۰\,,۱)$

$\pi = ۳/۱۴۱۳۵$

$e = ۲/۷۱۸۲۸$

خصوصیات توزیع نرمال:

خصوصیات این توزیع را به طور خلاصه بیان می‌کنیم:

۱) سطح زیر منحنی بالای محور Xها برابر با «۱» است، یعنی:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=۱$$

۲) به ازای تمام مقادیر «x» همیشه مقدار f(x) بزرگتر یا مساوی صفر است. $f(x)\geq ۰$

۳) حداکثر مقدار تابع در $x=M$ همیشه برابر است با: $f'(x)=۰$, $f''(x)=۰$ و الی آخر.

۴) تابع حول میانگن متقارن است، در این حالت خواهیم داشت:

$$f(x-\mu)=f(x+\mu)$$

۵) امید ریاضی و واریانس «x» به ترتیب همان μ و $\sigma^۲$ است.

$$\mu=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\times f(x)\,dx$$

۶) با دور شدن از میانگین به سمت چپ یا راست منحنی به محور «x»ها نزدیک و نزدیکتر می‌شود. ولی هیچ‌گاه آن را قطع نمی‌کند به بیان ریاضی خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty} f(X)=۰ \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=۰$$

۷) در این توزیع همیشه میانگین مساوی با میانه مساوی مد می‌باشد.

$$\mu=m_d=MO$$

۸) احتمال فاصله‌ای به اندازه یک انحراف معیار در هر یک از دو طرف میانگین برابر ۰/۶۸۳ و همچنین به اندازه دو انحراف معیار برابر با ۰/۹۵۴ (در دو طرف) و نهایت با سه انحراف معیار در دو طرف برابر با ۰/۹۹۹۸ است.

۹) همانطوری که گفته شد در این توزیع امید ریاضی صفر و واریانس آن یک است.

$$E(X)=۰ \quad , \quad V(X)=۱$$

با توجه به خواص گفته شده با داشتن میانگین و واریانس هر متغیری (در صورتی که نرمال باشد)، باید ابتدا آن را به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرد و سپس به راحتی کار از جداولی که در این خصوص برای توزیع نرمال تهیه

$Z=\frac{x-\bar{x}}{S}$ استفاده کنیم

آمار و احتمالات کارشناسی حسابداری ص ۴

✎ **مثال:** توزیع نرمال با میانگین ۳۰ و انحراف معیار ۹ در دست است، احتمال اینکه متغیر تصادفی «x» مقداری بین ۲۴ و ۴۳ بگیرد چقدر است.

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}\Rightarrow P(z_۱\le x\le z_۲)=P(۲۴\le x\le ۴۳)\Rightarrow P\left[\frac{۲۴-۳۰}{۹}\right]\le x\le\left[\frac{۴۳-۳۰}{۹}\right]$$

$$=P(\frac{-۲}{۳}\le x\le\frac{۱۳}{۹})=P(-۰/۶۷\le x\le ۱/۴۴)=۰/۹۲۵۱-۰/۲۵۱۴=۰/۶۷۳۷$$

✎ **مثال:** دستگاه خردکننده شیشه‌های آبلیمو طوری تنظیم شده است که فقط ۳۳۰ گرم را پر می‌کند، چنانچه مقدار آبلیموی پر شده در هر شیه دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۳۰ و انحراف معیار ۵ گرم باشد احتمالات زیر را محاسبه کنید:

الف) شیشه‌ای بین ۳۲۲ تا ۳۲۸ گرم آبلیمو بگیرد

ب) شیشه‌ای بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

ج) دایره کنترل کیفیت میزان آبلیموی ۷۰ شیشه را به صورت تصادفی وزن می‌کند انتظار می‌رود چند شیشه بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد.

جواب قسمت «الف»

$$P(z_۱\le x\le z_۲)=P(۳۲۲\le x\le ۳۲۸)=P\left[\frac{۳۲۲-۳۳۰}{۵}\right]\le x\le\left[\frac{۳۲۸-۳۳۰}{۵}\right]=(-۱/۶\le x\le -۰/۴)$$

$$=۰/۵۴۸-۰/۳۴۴۶=۰/۲۰۳۴$$

جواب قسمت «ب»:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{۳۳۵-۳۳۰}{۵}=۱\Rightarrow P=۱=۰/۸۴۱۳$$

جواب قسمت «ج»:

$$۰/۸۴۱۳\times=۵۸/۸۹۱$$

آمار و احتمالات کارشناسی حسابداری ص ۵

مثال: احتمالات الف) $P(z \le ۱/۲۵)$　　ب) $P(z \le -۰/۴)$　　ج) $P(z \ge ۱/۵۹)$

جواب قسمت «الف»:

با استفاده از جدول توزیع نرمال $P = ۰/۸۹۴۴$

جواب قسمت «ب»:

با استفاده از جدول توزیع نرمال $P = ۰/۳۴۴۶$

جواب قسمت «ج»:

$$P = [z \ge ۱/۵۹] = ۱ - [z \ge ۱/۵۹] = ۱ - ۰/۹۴۴۱ = ۰/۵۵۹$$

مثال: یک توزیعی دارای $\mu = ۵۰$ و $\sigma = ۲۰$ دقیقه‌ای می‌باشد، هزینه هر بار تعمیر کردن ۵,۰۰۰ ریال است، اگر تعمیر این ماشین بیش از ۸۵ دقیقه طول بکشد به علت توقف خط تولید ضرری برابر با ۱,۰۰۰ ریال به بار می‌آید. $E(X)$ این توزیع چقدر است؟

جواب:

$$P[x \ge ۸۵]$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{۸۵-۵۰}{۲۰} = \frac{۲۵}{۲۰} = ۱/۷۵ \Rightarrow P = ۰/۹۵۹۹$$

بعد از به دست آوردن عدد ۱/۷۵ به جدول مراجعه کرده و احتمال آن را با استفاده از جدول که عدد ۰/۹۵۹۹ می‌باشد استخراج می‌کنیم. از طرفی همانطور که می‌دانیم در صورت مسئله گفته شده است تامین بیش از ۸۵ دقیقه، یعنی:

$$۱ - P[z \ge ۱/۷۵] = ۱ - ۰/۹۵۹۹ = ۰/۰۴۰۱$$

$$E(X) = ۵,۰۰۰ - ۰/۹۵۹۹ \times ۰/۰۴۰۱ \times (۵,۰۰۰ + ۱۰۰,۰۰۰) = ۴,۷۹۹/۵ + ۴,۲۱۰/۵ = ۹,۰۱۰$$

استفاده معکوس از توزیع نرمال:

همانطور که گفته شد در استفاده مستقیم از توزیع نرمال، ابتدا «z» را مشخص و سپس احتمال آن را از جدول پیدا کرده امادر استفاده معکوس مقدار «z» برای ما مشخص نیست ولی احتمال آن معلوم است، بر این اساس احتمال را از جدول پیدا کرده و «z» متناظر با آن را مشخص می‌کنیم که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$x = \mu + \sigma z$$

مثال: چنانچه $\sigma^2 = ۶۴$ و داده‌ها به ترتیب ۲،۴،۵،۵ باشد و مقدار متغیر تصادفی ۸ باشد، مقدار توزیع نرمال چقدر است؟

جواب:

$$\sigma^2 = ۸$$

$$\mu = \frac{۲+۴+۵+۵}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{۸-۴}{۸} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵ = ۰/۶۹۱۵$$

آمار و احتمالات کارشناسی حسابداری ص ۶

II

باسمه تعالی تمرینات آمار و احتمالات کارشناسی حسابداری

۱- مشخص شده است که تعداد خرابی‌های ماشینی دارای توزیع پواسون با میانگین ۳ خرابی در ماه است (هر ماه ۳۰ روز) الف) متوسط بین دو خرابی چند روز است؟

ب) احتمال اینکه ۱۰ روز اول پس از سرویس ماشین خراب شود چقدر است؟

۲- مدیریت پرسنلی شرکتی برای تعدادی از متقاضیان استخدام آزمونی برگزار کرده است که حداقل نمره قبولی آن ۷۵ و مشخص شده است که میانگین نمرات متقاضیان ۶۳ با انحراف معیار ۱۵ است می‌پرسد چند درصد از متقاضیان پذیرفته می‌شوند

۳- زمان لازم برای انجام دادن کارهای بانکی یک مشتری بطور متوسط ۱۱۰ ثانیه با انحراف معیار ۳۵ ثانیه است که بصورت نرمال توزیع شده است مطلوبست

الف) کار ۸۵ درصد از مراجعه کنندگان به این بانک در چه دامنه‌ای در دو طرف میانگین زمان مراجعه قرار می‌گیرد

ب) کار ۵ درصد از افرادیکه بیشترین زمان را به خود اختصاص می‌دهند حداقل چقدر طول می‌کشد

۴- استادی تصمیم می‌گیرد که ۱۰ درصد بالاترین نمرات را ممتاز و ۲۳ درصد بعدی را خوب اعلام کند اگر نمره دانشجویان دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۳ و انحراف معیار ۲ باشد

الف) حداقل نمره ممتاز و حداقل نمره خوب را بدست آورید

ب) اگر او تصمیم بگیرد ۲۰ درصد دانشجویان را مردود اعلام کند حداقل نمره قبولی چقدر است؟

موفق باشید فرهادی

پاسخ تمرینات را تا ۹۸/۱۲/۲۴ به آدرس ذیل ایمیل کنید.

h.farhadi17@yahoo.com