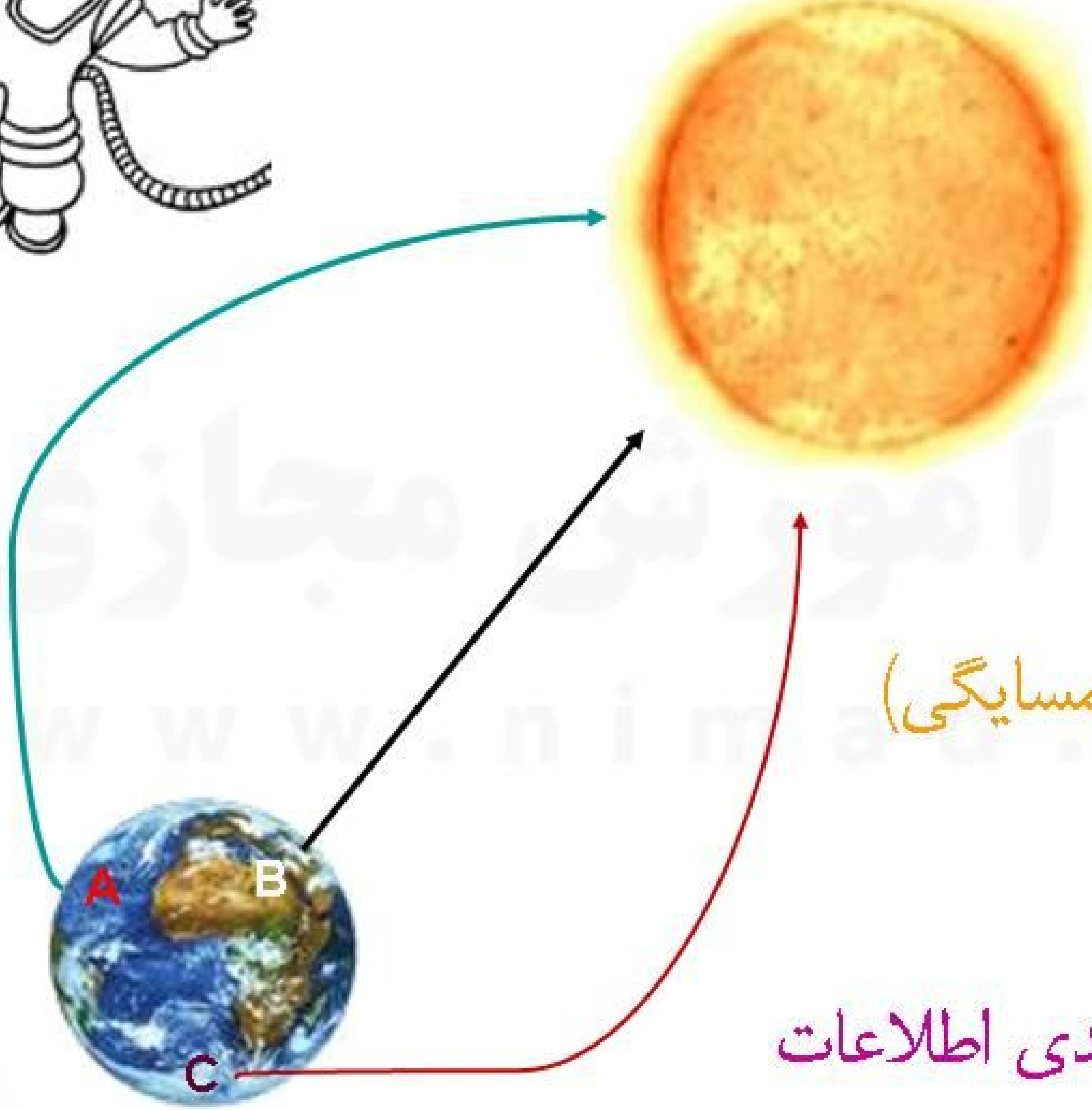
حد

LIMIT



اطراف خورشید (همسایگی)

نزدیک

دریافت و طبقه بندی اطلاعات

مثال)

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$f(-6)=\frac{(-6)^2-1}{-6-1}=-5$$

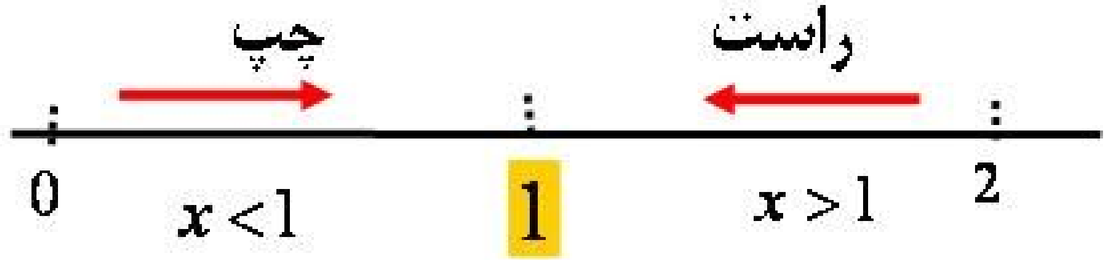
$$f(2)=\frac{2^2-1}{2-1}=3$$

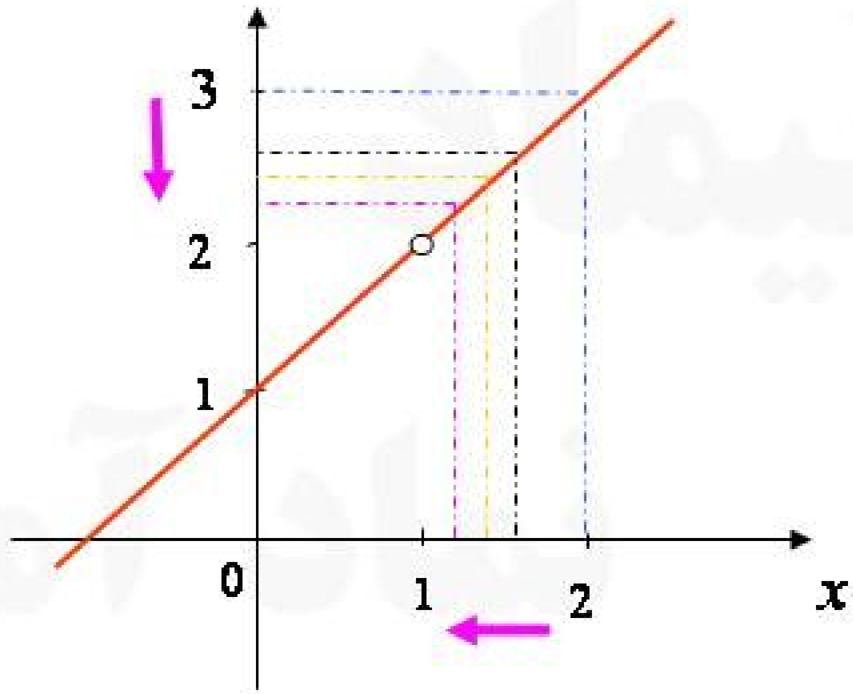
$$f(1)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{}{0}$$

تعریف نشده

نزدیک $x=1$ چه اتفاقی برای تابع می افتد ؟

سمت راست $x > 1$





$$f(2) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

$$f(1/1) = \frac{(1/1)^2 - 1}{1/1 - 1} = 2/1$$

$$f(1/001) = \frac{(1/001)^2 - 1}{1/001 - 1} = 2/001$$

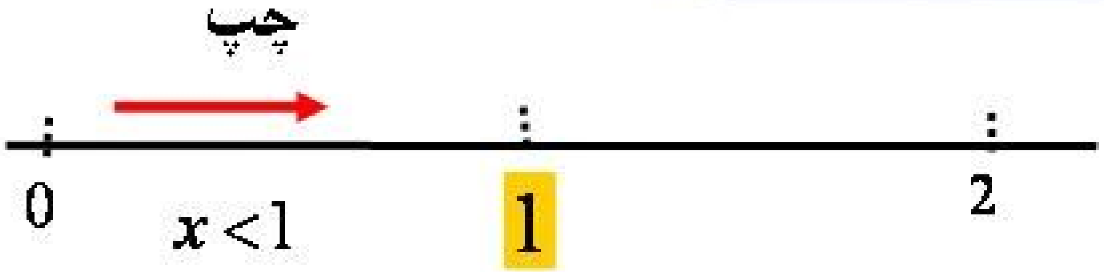
x	2	1/1	1/001	1/000001 $\longrightarrow$ 1
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	3	2/1	2/001	2/000001 $\longrightarrow$ 2

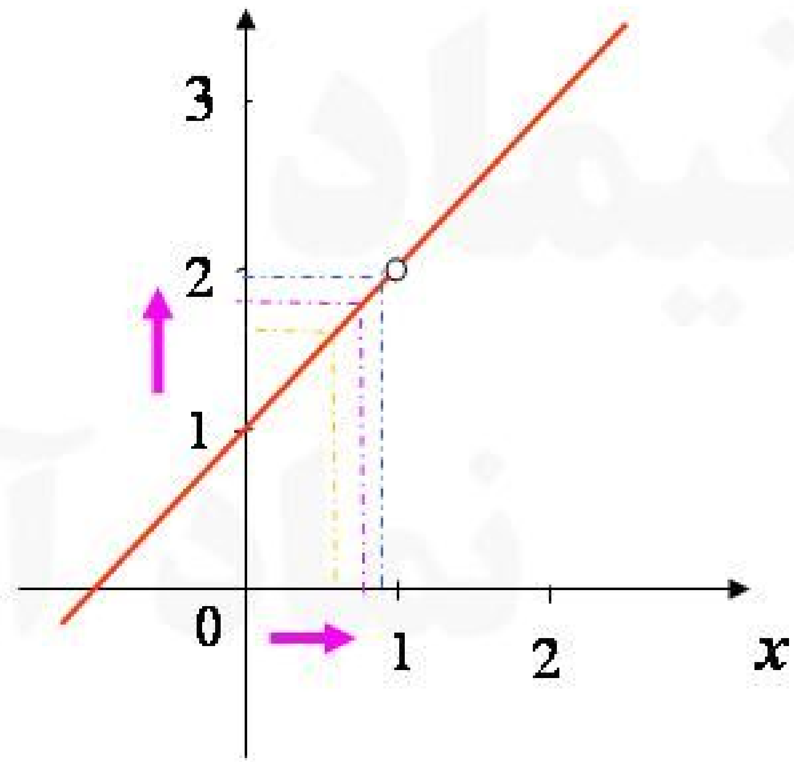
وقتی که x از مقادیر بزرگتر از یک به عدد یک نزدیک می شود، مقدار تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ به عدد 2 نزدیک می شود (میل می کند).

به عبارت دیگر هر قدر فاصله ی x از راست 1 کمتر می شود فاصله $f(x)$ نیز از 2 کمتر می شود.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

سمت چپ: $x < 1$





$$f(0)=\frac{(0)^2-1}{0-1}=1$$

$$f(0/9)=\frac{(0/9)^2-1}{0/9-1}=1/9$$

$$f(0/999)=\frac{(0/999)^2-1}{0/999-1}=1/999$$

x	0	0.9	0.999	0.999999 $\longrightarrow$ 1
$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$	1	1.9	1.999	1.999999 $\longrightarrow$ 2

وقتی که x از مقادیر کوچکتر از یک، به عدد یک نزدیک می شود، مقدار تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

به عدد 2 نزدیک می شود (میل می کند).

به عبارت دیگر هر قدر فاصله ی x از سمت چپ 1 کمتر می شود، فاصله $f(x)$ نیز از 2 کمتر

می شود.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

مثال)

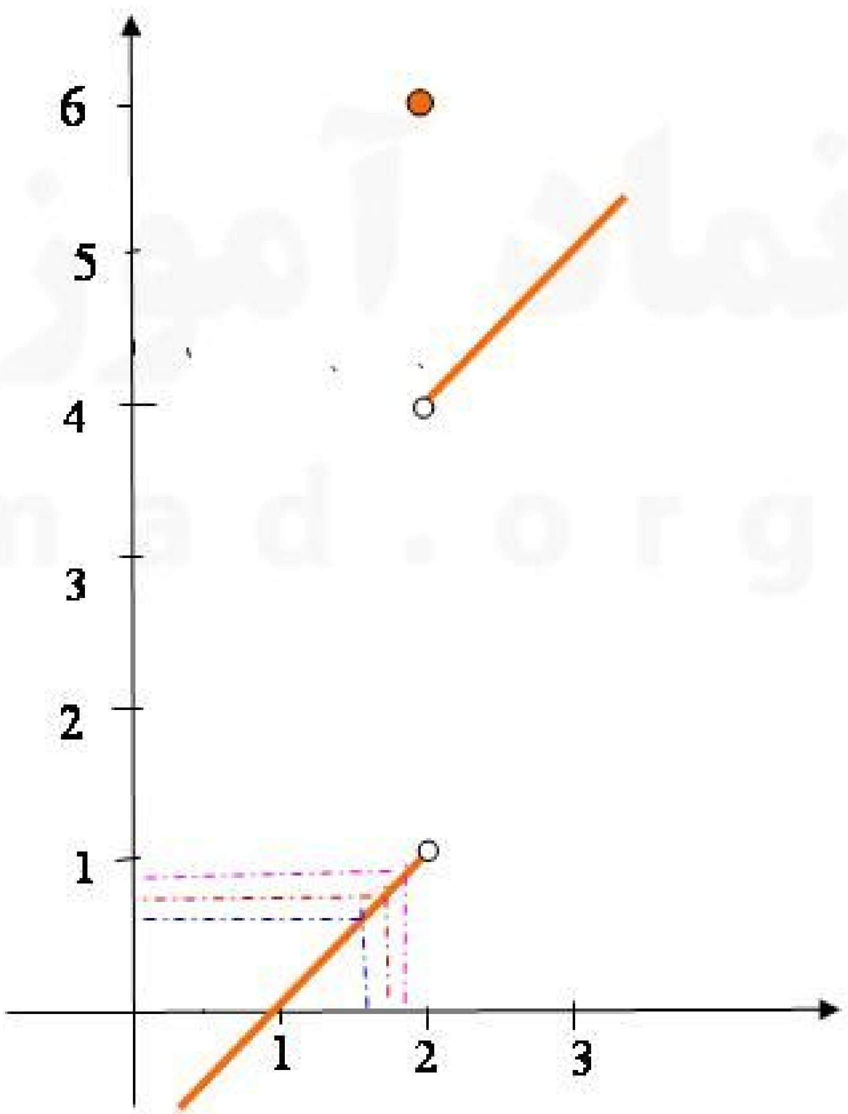
حد چپ و راست تابع زیر را در نقطه $x=2$ به دست آورید.

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & x<2 \\ x+2 & x>2 \\ 6 & x=2 \end{cases}$$

حد راست

x	3	2.1	2.001	2.0001 $\longrightarrow$ 2
$g(x)$	5	4.1	4.001	4.0001 $\longrightarrow$ 4

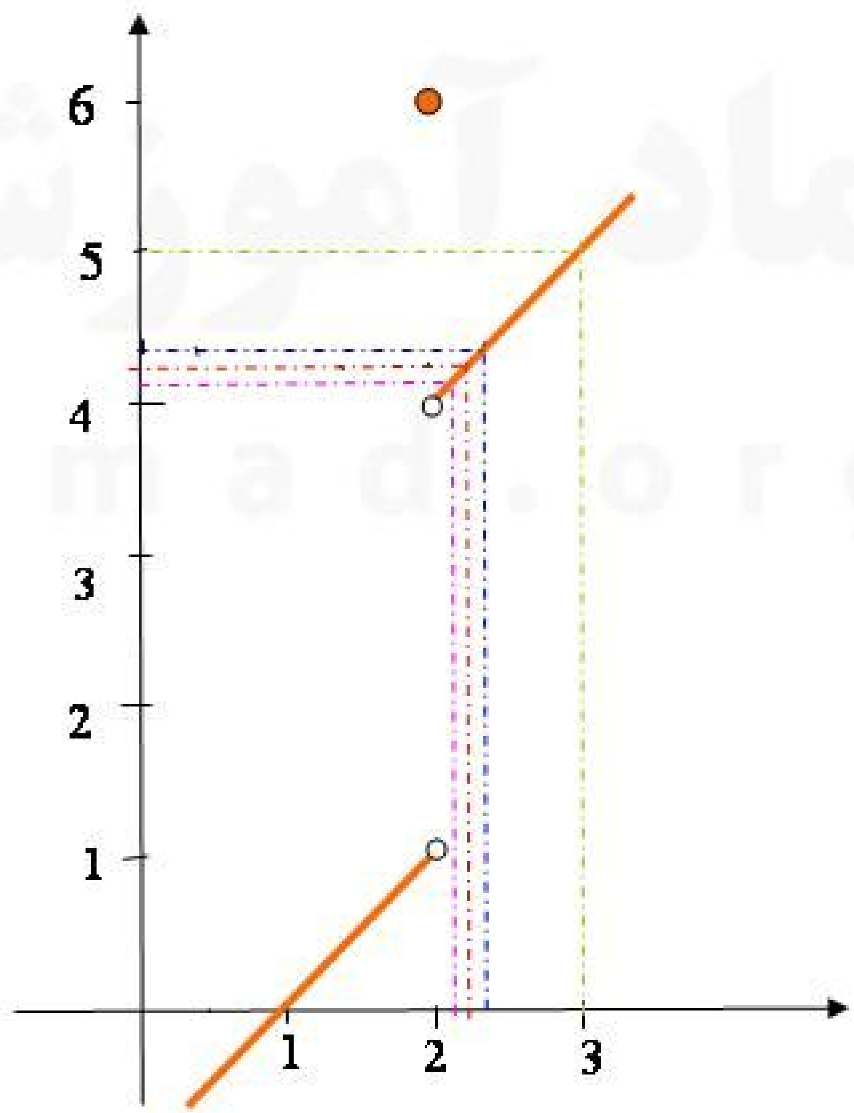
$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 4$$



حد چپ

x	1	1.9	1.999	1.999999 $\longrightarrow$ 2
$g(x)$	0	0.9	0.999	0.999999 $\longrightarrow$ 1

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1$$



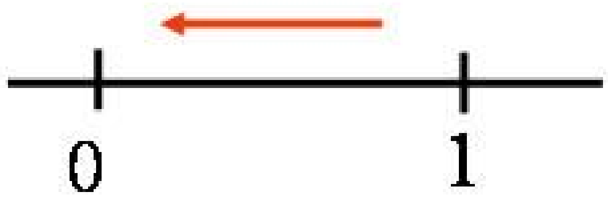
$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	$g(x)=\begin{cases} x-1 & x<2 \\ x+2 & x>2 \\ 6 & x=2 \end{cases}$
$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$	$\lim_{x\to 2^+} g(x)=4$ $\lim_{x\to 2^-} g(x)=1$
تابع حد دارد و می نویسیم $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ $f(1)$ وجود ندارد	تابع حد ندارد $g(2)=6$

مثال)

آیا تابع زیر را در نقطه $x = 1$ حد دارد؟

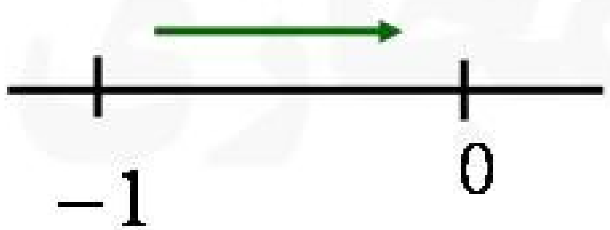
$$f(x) = [x]$$

حد راست



x	1	0/1	0/001	0/000001 $\longrightarrow$ 0
$f(x)=[x]$	1	0	0	0 $\longrightarrow$ 0

حد چپ



x	-1	$-0/1$	$-0/001$	$-0/000001 \longrightarrow 0$
$f(x)=[x]$	-1	-1	-1	$-1 \longrightarrow -1$

$$\lim_{x\to 0^+}[x]=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}[x]=-1$$

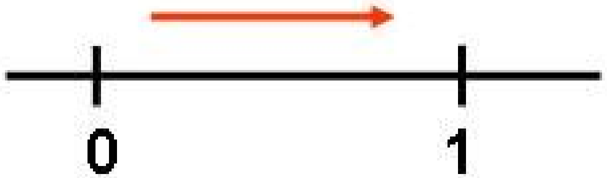
تابع حد ندارد

مثال)

حد تابع زیر را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

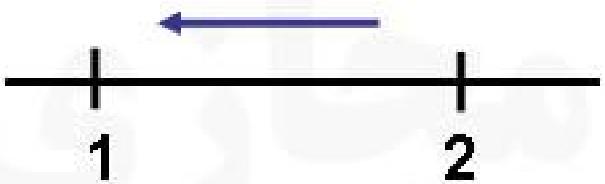
$$f(x) = \sqrt{1 - x}$$

حد چپ



x	0	0.9	0.999	$0.99999 \longrightarrow 1$
$f(x)=\sqrt{1-x}$	1	0.316	0.03162	$0.003162 \longrightarrow 0$

حد راست



x	2	1.9		
$f(x)=\sqrt{1-x}$	1	زیر رادیکال منفی		تابع به ازای x های سمت چپ تعریف نشده است .

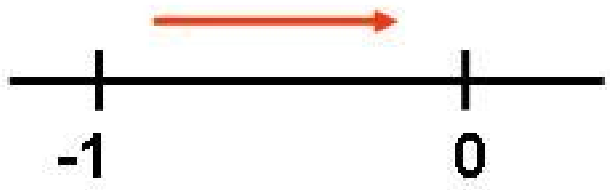
تابع حد ندارد.

مثال)

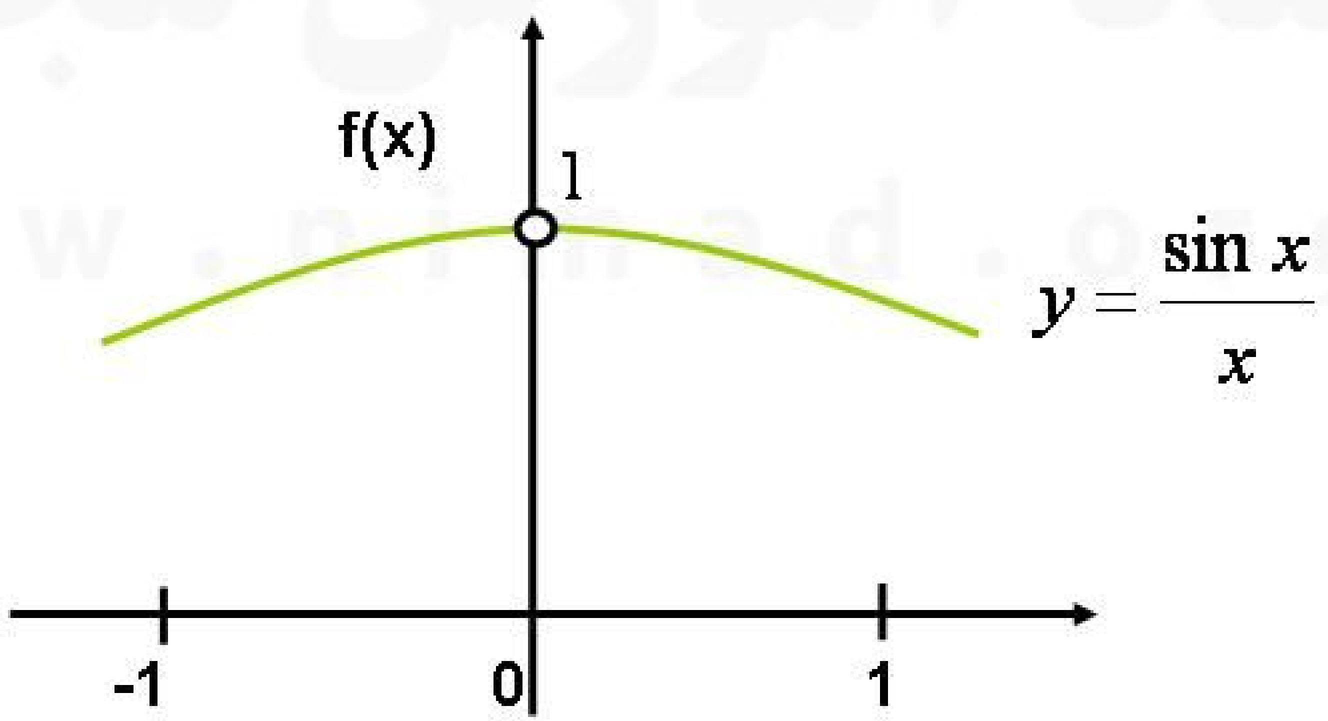
حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

حد چپ



x	-1	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001 \longrightarrow 0$
$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$	0.8414	0.9983	0.99998	$0.9999 \longrightarrow 1$



حد راست

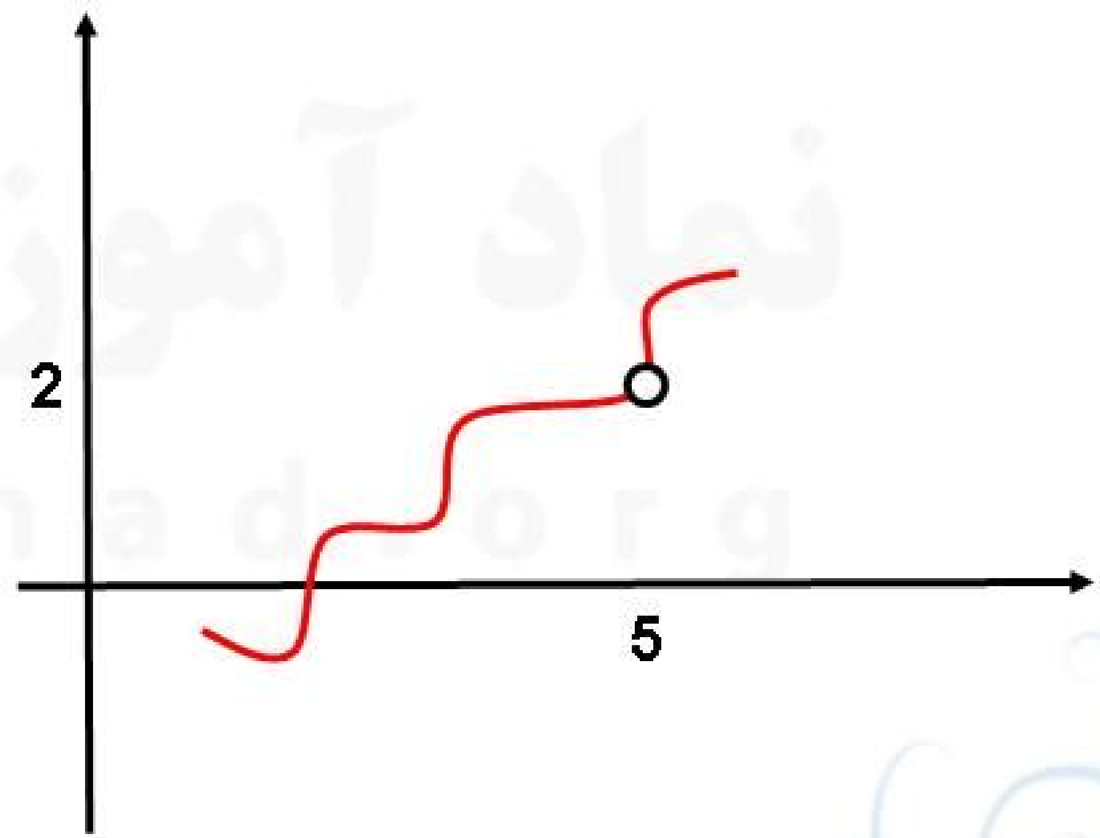
x	1	0/1	0/01	0/001 $\longrightarrow$ 0
$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$	0.8414	0.9983	0.99998	0.9999 $\longrightarrow$ 1

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

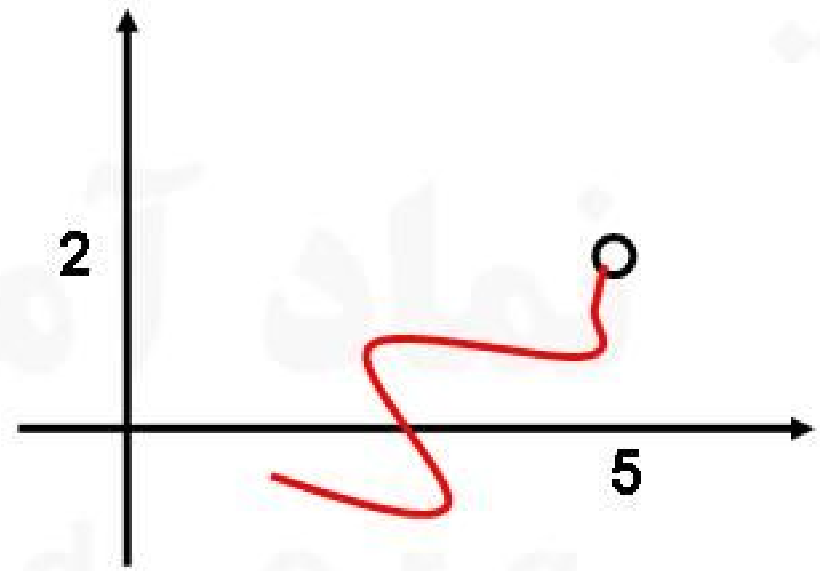
مثال)

نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر می باشد. آیا تابع در نقطه $x = 5$ حد دارد؟

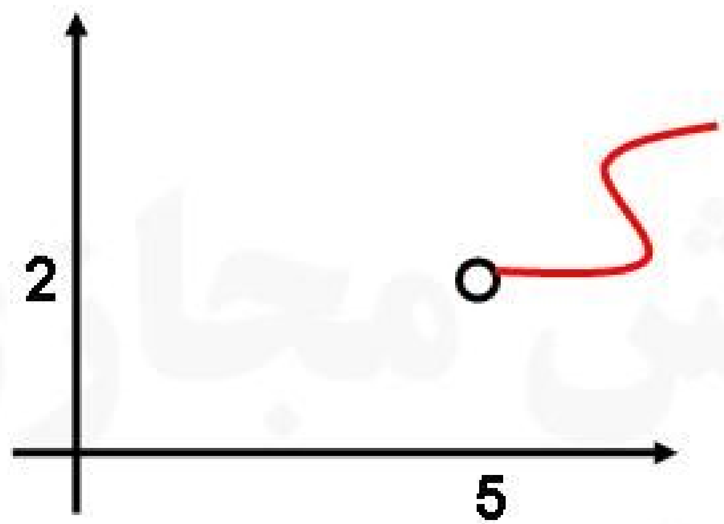


راه حل:

حد دارد و برابر 2 است.



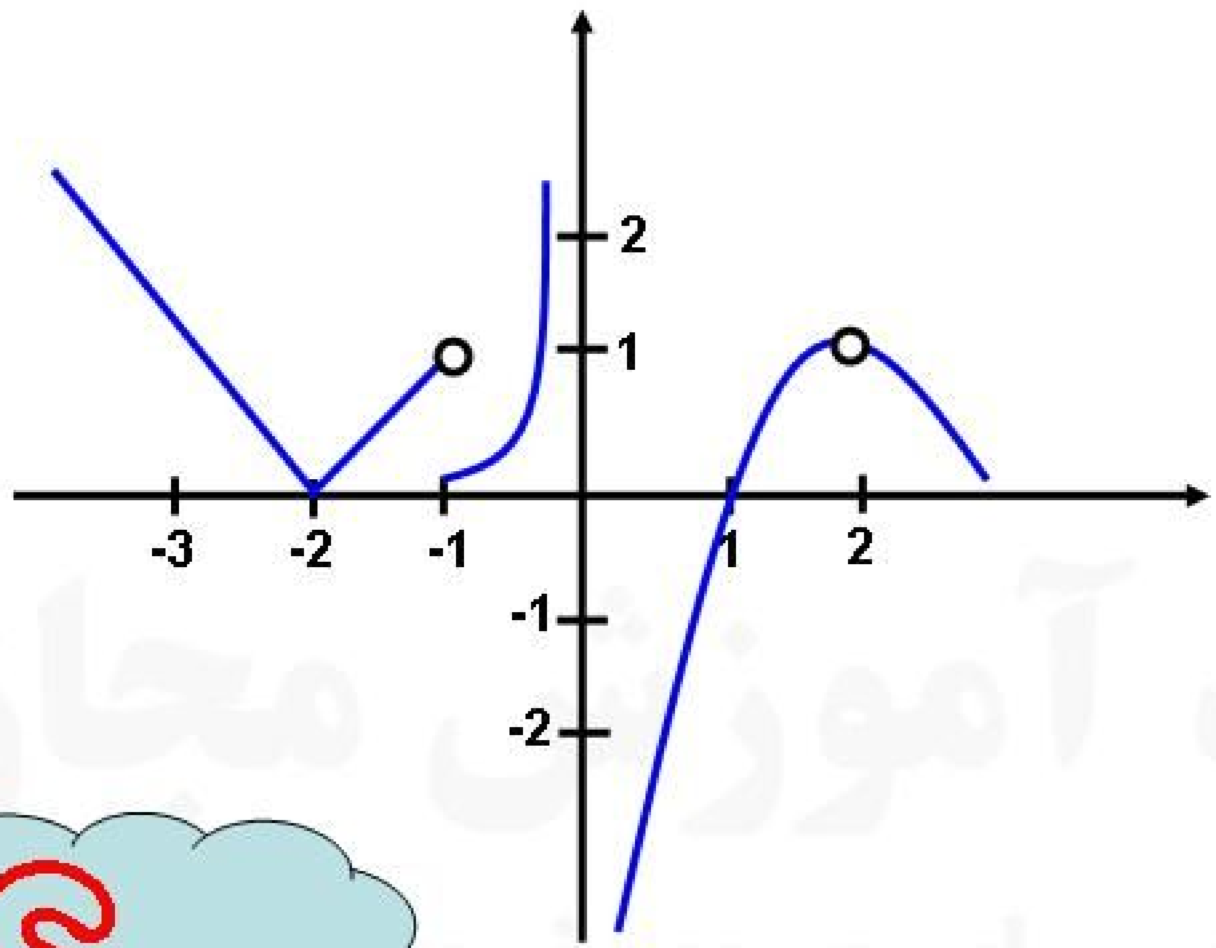
$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 2$$



$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 2$$

مثال)

مقدار حدود زیر را، در صورت وجود، از روی نمودار داده شده بیان کنید.



الف - $\lim_{x \to 1} g(x)$

ب - $\lim_{x \to -2^-} g(x)$

پ - $\lim_{x \to -2^+} g(x)$

ت - $\lim_{x \to -1^-} g(x)$

ج - $\lim_{x \to -1^+} g(x)$

الف – $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$ و $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 1} g(x) = 0$

ب – $\lim_{x \to -2^-} g(x) = 0$

پ – $\lim_{x \to -2^+} g(x) = 0$

ت – $\lim_{x \to -1^-} g(x) = 1$

ج – $\lim_{x \to -1^+} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

به چه معنا است؟

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

به چه معنا است؟

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = L$$

x	x های بزرگتر از a	$\longrightarrow a$
$f(x)$	مقادیر مربوطه	$\longrightarrow l$

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = L$$

x	x های کوچکتر از a	$\longrightarrow a$
$f(x)$	مقادیر مربوطه	$\longrightarrow l$

تعریف حد توسط

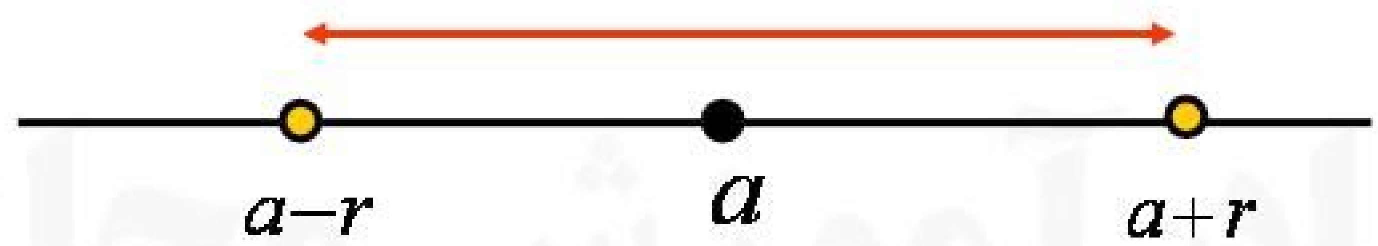
ε δ

یادآوری۱: $|x-a|<r \Leftrightarrow -r<x-a<r \Leftrightarrow a-r<x<a+r$

یادآوری۲: $(a,b)=\{\, x\in\Re \mid a<x<b \,\}$

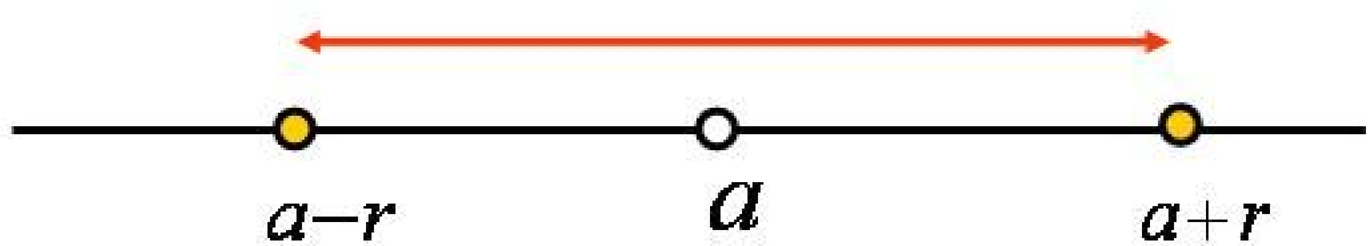
تعریف: همسایگی به مرکز a و شعاع r

$$(a-r, a+r)=\{x\in\Re \mid a-x<x<a+r\}=\{x\in\Re \mid |x-a|<r\}$$



تعریف: همسایگی **محذوف** به مرکز a و شعاع r

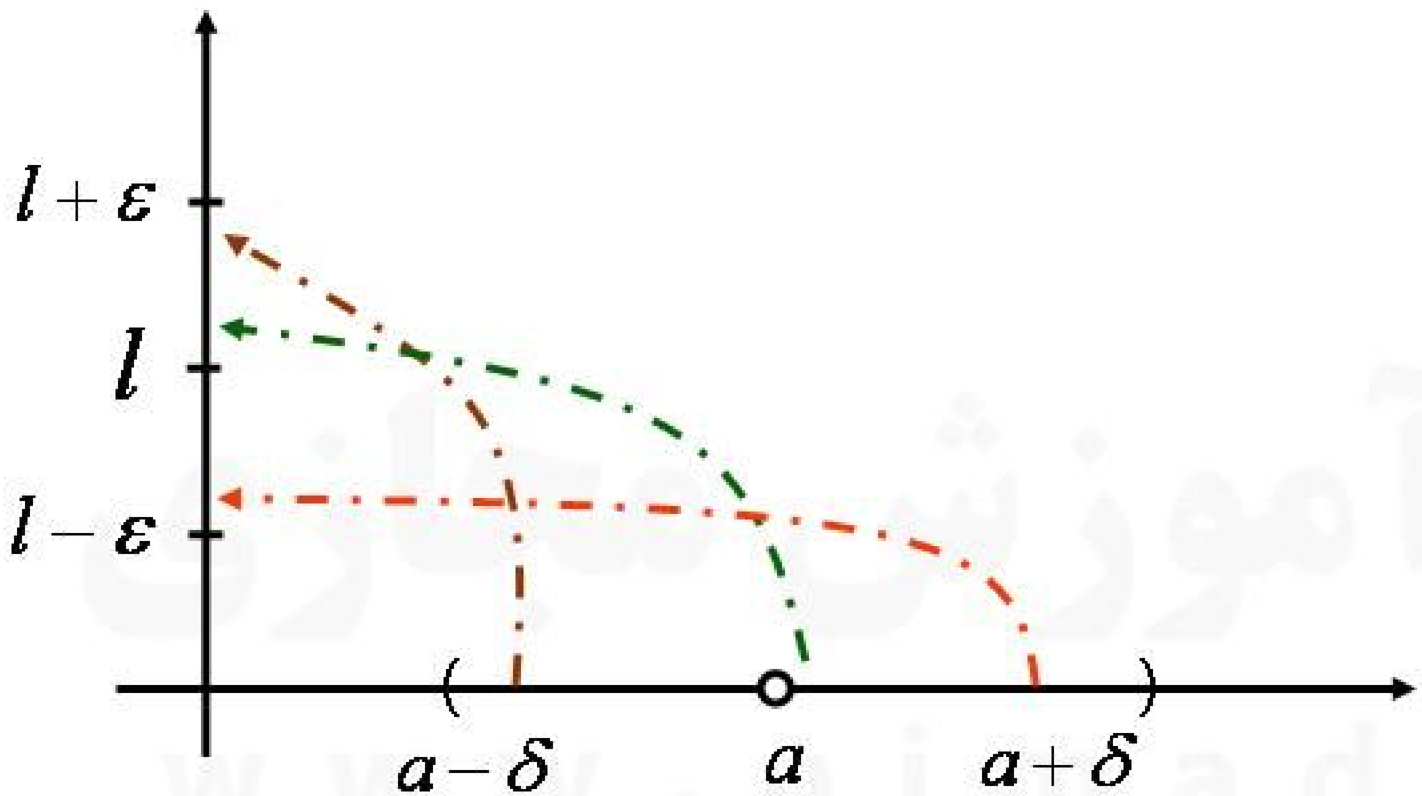
$$(a-r, a+r)-\{a\}=\{x\in\Re \mid 0<|x-a|<r\}$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تعریف:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad ;\left(\forall x \in D_f \;; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \right)$$



برای هر همسایگی به مرکز نقطه l و به شعاع ε ، یک همسایگی محذوف به مرکز نقطه a و به شعاع δ وجود دارد که وقتی x درون آن همسایگی باشد $f(x)$ در همسایگی l به شعاع ε است .

نتایج مهم تعریف حد

۱- در حد، مقادیر x به سمت نقطه a میل می کنند، پس ممکن است f در $a =$ تعریف نشده باشد.

۲- تابع باید در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، در غیر این صورت تابع حد ندارد .

۳- همواره مقدار $\delta > 0$ (شعاع همسایگی به مرکز a)وابسته به $\varepsilon > 0$ (شعاع همسایگی به مرکز l)

می باشد. به همین منظور در تعریف حد به دنبال پیدا کردن $\delta > 0$ بر حسب $\varepsilon > 0$ هستیم.

٤- تعریف حد باید به ازای تمامی مقادیر $\varepsilon > 0$ برقرار باشد. چرا که در غیر این صورت یعنی اگر:

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad ; \left(\exists x\in D_f \, ; \, 0< |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| \geq \varepsilon\right)$$

آنگاه تابع f در $x = a$ فاقد حد است.

مراحل حل یک حد براساس ε و δ

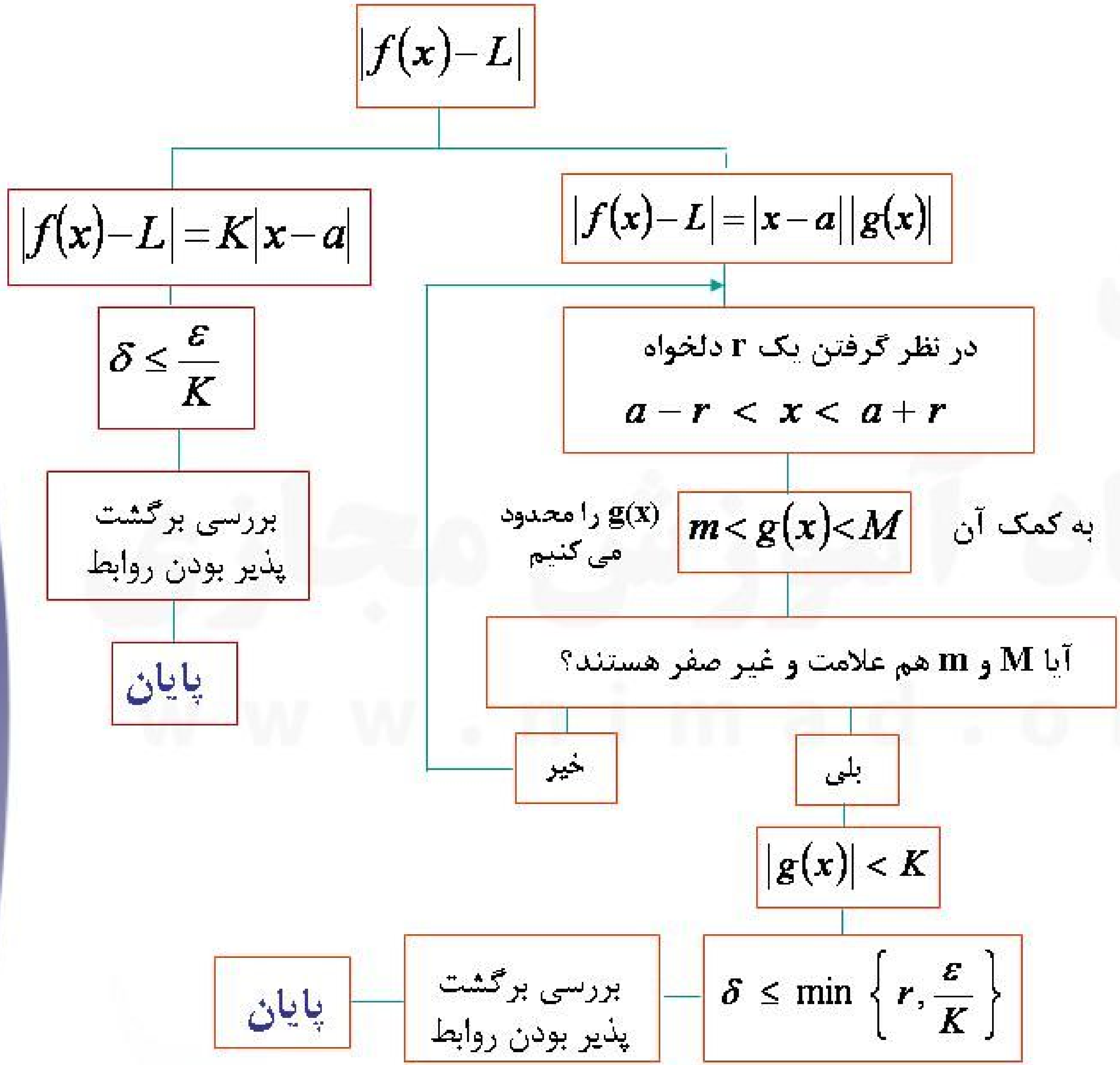
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

گام اول : تعریف حد تابع را بر اساس ε می نویسیم.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad s.t \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

گام دوم:


$|f(x)-L|$
$|f(x)-L|=K|x-a|$
$|f(x)-L|=|x-a||g(x)|$
$\delta \le \frac{\varepsilon}{K}$
بررسی برگشت پذیر بودن روابط
پایان
در نظر گرفتن یک r دلخواه
$a-r < x < a+r$
به کمک آن
$m<g(x)<M$
g(x) را محدود می کنیم
آیا M و m هم علامت و غیر صفر هستند؟
خیر
بلی
$|g(x)| < K$
$\delta \le \min\left\{r, \frac{\varepsilon}{K}\right\}$
بررسی برگشت پذیر بودن روابط
پایان

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1}(3x+2)=5$$

$$\lim_{x \to 1} 3x+2=5$$

راه حل:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad 0<|x-1|<\delta \quad \Rightarrow \quad |3x+2-5|<\varepsilon$$

می خواهیم با شرط $0<|x-1|<\delta$ داشته باشیم : $|3x+2-5|<\varepsilon$

به طور معادل می خواهیم با شرط $0<|x-1|<\delta$ داشته باشیم : $|3x-3|<\varepsilon$

به طور معادل می خواهیم با شرط $0<|x-1|<\delta$ داشته باشیم : $3|x-1|<\varepsilon$

به طور معادل می خواهیم با شرط $0<|x-1|<\delta$ داشته باشیم : $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$

پس کافی است در نظر بگیریم : $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$

برگشت پذیر بودن روابط

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \delta \le \frac{\varepsilon}{3} \qquad 0<|x-1|<\delta \;\Rightarrow\; |3x+2-5|<\varepsilon$$

$$|x-1|<\delta \le \frac{\varepsilon}{3} \;\Rightarrow\; 3|x-1|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\; |3x-3|<\varepsilon \;\Rightarrow\; |3x+2-5|<\varepsilon$$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = 12$$

راه حل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}=12$$

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\delta>0\quad ,\quad 0<\left|x-2\right|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{3x^2-12}{x-2}-12\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{3x^2-12}{x-2}-12\right|=\left|\frac{3(x-2)(x+2)}{x-2}-12\right|=3\left|x+2-4\right|=3\left|x-2\right|<\varepsilon$$

$$\boxed{\delta\le\frac{\varepsilon}{3}}$$ در نظر می گیریم

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to -3} \left(5 - x - x^2\right) = -1$$

راه حل:

$$\lim_{x\to -3}\left(5-x-x^2\right)=-1$$

$$\forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, \delta>0 \quad , \quad |x+3|<\delta \quad \Rightarrow \quad |5-x-x^2+1|<\varepsilon$$

$$|5-x-x^2+1| = |-x^2-x+6| = |x^2+x-6|$$

$$=|(x+3)(x-2)| = |x+3|\,|x-2|$$

با در نظر گرفتن $r=1$ داریم:

$$-3-1<x<-3+1 \quad \Rightarrow \quad -4<x<-2$$

$$\Rightarrow \quad -6<x-2<-4 \quad \Rightarrow \quad |x-2|<6$$

$$\boxed{\delta \le \min\{1,\frac{\varepsilon}{6}\}}$$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{1-3x} = 2$$

راه حل:

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{1 - 3x} = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad |x+1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{1-3x} - 2| < \varepsilon$$

$$|\sqrt{1-3x} - 2| = \left|\frac{1-3x-4}{\sqrt{1-3x}+2}\right| = \left|\frac{-3x-3}{\sqrt{1-3x}+2}\right|$$

$$= \left|\frac{3(x+1)}{\sqrt{1-3x}+2}\right| = \left|\frac{3}{\sqrt{1-3x}+2}\right| |x+1|$$

$$\left|\frac{3}{\sqrt{1-3x}+2}\right|\left|x+1\right|$$

$$\left|x+1\right|<1 \;\Rightarrow\; -1<x+1<1 \;\Rightarrow\; -2<x<0$$

$$\Rightarrow\; 0<-3x<6 \;\Rightarrow\; 1<1-3x<7 \;\Rightarrow\; 1<\sqrt{1-3x}<\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow\; 3<\sqrt{1-3x}+2<\sqrt{7}+2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{7}+2}<\frac{1}{\sqrt{1-3x}+2}<\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\; \frac{3}{\sqrt{7}+2}<\frac{3}{\sqrt{1-3x}+2}<1 \qquad \Rightarrow\; \left|\frac{3}{\sqrt{1-3x}+2}\right|<1$$

$$\boxed{\delta=\min\left\{1,\varepsilon\right\}}$$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x-4} = -1$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x-4} = -1$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \delta > 0 \quad , \quad 0 < |x-3| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x-2}{x-4} + 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x-2}{x-4} + 1 \right| = \left| \frac{x-2+x-4}{x-4} \right| = \left| \frac{2x-6}{x-4} \right| = 2\frac{|x-3|}{|x-4|} < \varepsilon$$

$$\boxed{\delta_1 = 1}$$

$$-1 < x-3 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2 < x < 4 \quad \Rightarrow \quad -2 < x-4 < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < |x-4| < 2$$

چون کران پایین صفر است پس شعاع را عوض می کنیم.

$$\boxed{\delta_1 = \frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}+3 < x < \frac{1}{2}+3 \;\Rightarrow\; \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2} < x-4 < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2} < |x-4| < \frac{3}{2}$$

$$\left|\frac{x-2}{2-4}+1\right| \;=\; 2\frac{|x-3|}{|x-4|} \;<\; 2|x-3|\frac{1}{\frac{1}{2}} \;=\; 4|x-3| \;<\; \varepsilon$$

$$\Rightarrow\; |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \;\Rightarrow\; \boxed{\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}}$$

$$\boxed{\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 7$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x-2}=7$$

راه حل:

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists\delta>0 \qquad 0<|x-3|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x^2-2}{x-2}-7\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2-2}{x-2}-7\right|=\left|\frac{x^2-2-7x+14}{x-2}\right|=\left|\frac{x^2-7x+12}{x-2}\right|=\left|\frac{(x-3)(x-4)}{x-2}\right|=|x-3|\left|\frac{x-4}{x-2}\right|<\varepsilon$$

برای $|x-4|$ کران بالا و برای $|x-2|$ کران پایین پیدا می کنیم

$$\begin{cases}x\to 3\\ \boxed{\delta_1=\frac{1}{2}}\end{cases}\Rightarrow\frac{-1}{2}<x-3<\frac{1}{2}\Rightarrow 2/5<x<3/5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-1/5<x-4<-0/5\\ 0/5<x-2<1/5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}<|x-4|<\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}<|x-2|<\frac{3}{2}\end{cases}$$

کران بالای $\left|x-۴\right|$ برابر $\frac{3}{2}$ و کران پائین $\left|x-2\right|$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$\left|\frac{x^2-2}{x-2}-7\right| = |x-3|\ \frac{|x-4|}{|x-2|} < |x-3| \times \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3\,|x-3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow\quad |x-3| < \boxed{\frac{\varepsilon}{3} = \delta_2}$$

پس $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

حدود یک طرفه

(حد راست _ حد چپ)

تعریف حد راست:

تابع f در a دارای حد راست L است اگر و فقط اگر:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad (\forall x \ , a < x < a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

و می نویسیم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

تعریف حد چپ :

تابع f در نقطه a دارای حد چپ است L اگر و فقط اگر

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \left(\forall x \in D_f ; a-\delta < x < a \right) \Rightarrow \left| f(x)-L \right| < \varepsilon$$

و می نویسیم

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{1+e^{\frac{-1}{x}}} = 2$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{1+e^{\frac{-1}{x}}} = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad (\forall x, 0 < x < \delta) \Rightarrow \left| \frac{2}{1+e^{\frac{-1}{x}}} - 2 \right| < \varepsilon$$

داریم:

$$\left| \frac{2}{1+e^{\frac{-1}{x}}} - 2 \right| = \frac{2}{1+e^{\frac{-1}{x}}} \left| -e^{\frac{-1}{x}} \right| = \frac{2e^{\frac{-1}{x}}}{1+e^{\frac{-1}{x}}} = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} < \frac{2}{e^{\frac{1}{\delta}}+1} \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{\delta}} + 1 \ge \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{\delta} \ge \ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$$

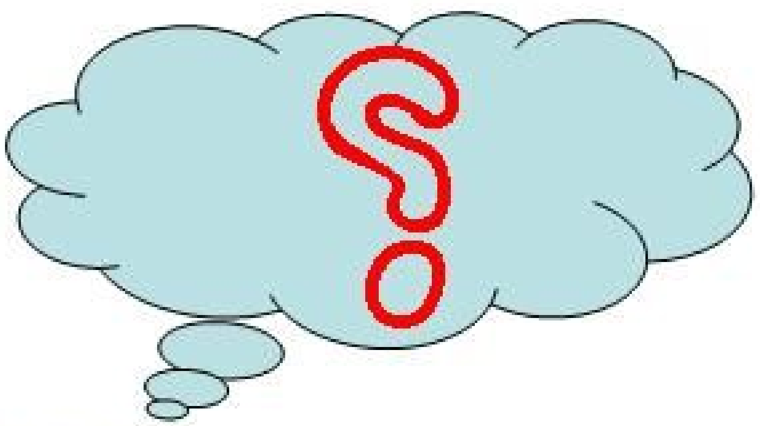
پس کافی است که $0 < \delta \le \dfrac{1}{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)}$ که در آن $0 < \varepsilon < 2$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x>1 \\ 4x-2 & x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$



راه حل:

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & x>1\\ 4x-2 & x<1\end{cases}$$

حد راست:

$$\forall \varepsilon>0 \qquad \exists \delta_1>0 \quad (\forall x, 1<x<1+\delta_1)\Rightarrow |3x-1-2|<\varepsilon$$

$$|3x-1-2|=|3x-3|=3|x-1|<3\delta_1\le\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \delta_1\le\frac{\varepsilon}{3} \qquad (۱)$$

حد چپ:

$$\forall \varepsilon>0 \qquad \exists \delta_2>0 \quad (\forall x, 1-\delta_2<x<1)\Rightarrow |4x-2-2|<\varepsilon$$

$$|4x-2-2|=|4x-4|=4|x-1|<4\delta_2\le\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \delta_2\le\frac{\varepsilon}{4} \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow \delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\frac{\varepsilon}{4}\right\}\Rightarrow 0<\delta\le\frac{\varepsilon}{4}$

قضیه:

f در a دارای حد L می باشد	$\Leftrightarrow$	حد چپ و راست تابع f در نقطه a موجود و برابر L باشد .

یعنی

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

نتیجه:

۱- هرگاه حد چپ یا حد راست تابع f در نقطه مفروض a موجود نباشد

یا

۲- دو حد چپ و راست موجود ولی با هم برابر نباشد

$\Leftarrow$ f در نقطه a فاقد حد است.

قضایای اساسی حد در یک نقطه

۱ – حد تابع در یک نقطه در صورت موجود، منحصر بفرد است.

هرگاه $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ و a و L_1 و L_2 اعداد متناهی باشند.

۲- (قانون جمع حدود)

$$\lim_{x \to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

(تعمیم پذیر می باشد)

۳- (قانون تفاضل حدود)

$$\lim_{x \to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$$

(تعمیم پذیر می باشد)

۴- (قانون ضرب حدود)

$$\lim_{x \to a}\big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1.L_2$$

(تعمیم پذیر می باشد)

۵- (قانون تقسیم حدود)

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$$

۶- (قانون حد ضریب ثابت)

(k عددی ثابت)

$$\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = k L_1$$

۷- (قانون حد توان)

$$\lim_{x \to a} f^{n}(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{n} = L_1^{\,n}$$

۸- (قانون حد ریشه)

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$$

(n عدد صحیح ومثبت)

(در صورتی که n زوج باشد باید $L_1 > 0$ باشد)

۹- (قانون حد قدر مطلق)

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim_{x \to a} f(x)\right| = |L_1|$$

۱۰– (قانون حد سینوس)

$$\lim_{x \to a} \sin f(x) = \sin \lim_{x \to a} f(x) = \sin L_1$$

۱۱– (قانون حد کسینوس)

$$\lim_{x \to a} Cos\ f(x) = Cos \lim_{x \to a} f(x) = Cos\ L_1$$

۱۲- (قانون حد آرک سینوس)

$$\lim_{x \to a} Arc\sin f(x) = Arc\sin \lim_{x \to a} f(x) = Arc\sin L_1$$

۱۳- (قانون حد آرک کسینوس)

$$\lim_{x \to a} ArcCos\ f(x) = ArcCos \lim_{x \to a} f(x) = ArcCos\ L_1$$

۱۴- (قانون حد نمایی)

$$\lim_{x \to a} C^{f(x)} = C^{\lim_{x\to a} f(x)} = C^{L_1}$$

(c عدد ثابت)

۱۵- (قانون حد لگاریتم طبیعی)

$$\lim_{x \to a} \ln f(x) = \ln \lim_{x \to a} f(x) = \ln L_1$$

(با شرط $L_1 > 0$)

قضیه حد تابع ثابت:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

قضیه حد تابع چند جمله ای:

$$\lim_{x \to b} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_n b^n$$

توجه:

تمام قضایای فوق را می توان در مورد محاسبه حد راست و حد چپ نیز به کار برد.

برای مثال)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1\\[2ex] \lim\limits_{x\to a^+} g(x)=L_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\big(f(x)+g(x)\big)=L_1+L_2$$

قضایای فوق به زبان ساده به ما چه می گویند؟

اگر مقدار حد تابع برابر با عدد متناهی L باشد. آنگاه هر عمل از قبیل به توان رساندن تا بع، ریشه nام گرفتن از تابع، قدر مطلق گرفتن، تاثیر نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس و ...

همان عمل نیز بر L تاثیر می کند اما در چند مورد جانب احتیاط را نباید از دست داد و باید حد چپ و راست و و جود همسایگی را بررسی نمود:

الف) توابع چند ضابطه ای

ب) توابع جزء صحیح

ج) هنگامی که فرجه رادیکال زوج است.

مثال)

مقدار حد تابع زیر را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

$$f(x) = 3^{\frac{x^2-1}{x-1}}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 1} 3^{\frac{x^2-1}{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

(قبلا اثبات شد)

$$\lim_{x \to 1} 3^{\frac{X^2-1}{X-1}} = 3^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}} = 3^2 = 9$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 1}\left(|x-4|+\frac{x+3}{x-2}+\left(x^{2}+4\right)^{3}\right)$$

راه حل:

$$\lim_{x\to 1}\left(|x-4|+\frac{x+3}{x-2}+\left(x^2+4\right)^3\right)$$

(قانون جمع حدود)

$$=\lim_{x\to 1}|x-4|+\lim_{x\to 1}\left|\frac{x+3}{x-2}\right|+\lim_{x\to 1}\left(x^2+4\right)^3$$

(قضیه حد چند جمله ای ،قانون حد قدر مطلق،
تقسیم حدود و حد توان)

$$=|1-4|+\frac{|1+3|}{|1-2|}+\left(1^2+4\right)^3$$

$$=3+4+5^3=132$$

مثال)

حد تابع زیر را در نقطه $x=-2$ به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-2 \\ x-1 & x>-2 \end{cases}$$

راه حل:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-۲ \\ x-1 & x>-۲ \end{cases}$$

حد چپ و راست به طور جداگانه $\Leftarrow$ تابع چند ضابطه ای

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(x-1)=-2-1=-3$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-} x^2=(-2)^2=4$$

حد ندارد $\Leftarrow$ حد راست $\neq$ حد چپ

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x+1}$$

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x+1}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \to -1}(x+1)} = \sqrt{-1+1} = 0$$

(این رابطه اشتباه است)

توجه:

چون فرجه زوج است وقتی رابطه فوق درست است که مقدار حد تابع زیر رادیکال بزرگتر از صفر باشد.

تابع $\sqrt{x+1}$ برای مقادیر کمتر از ۱- تعریف نشده است لذا همسایگی چپ وجود ندارد پس تابع در $x=-1$ حد ندارد.

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\lim \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

توجه:

هنگامی که x به ۱ نزدیک می شود و حد می گیریم داریم $x \neq 1$ و در نتیجه $x-1 \neq 0$

بنابراین عامل مشترک $(x-1)$ را می توان حذف کرد.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

مثال)

در تابع زیر مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 6$ و

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b & x > 3 \\ ax^2 + bx + 2 & x < 3 \end{cases}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \quad و \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

❶ $$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+}(ax + 2b) = 3a + 2b = 6$$

❷ $$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-}(ax^2 + bx + 2) = 9a + 3b + 2 = 2 \Rightarrow 9a + 3b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$$

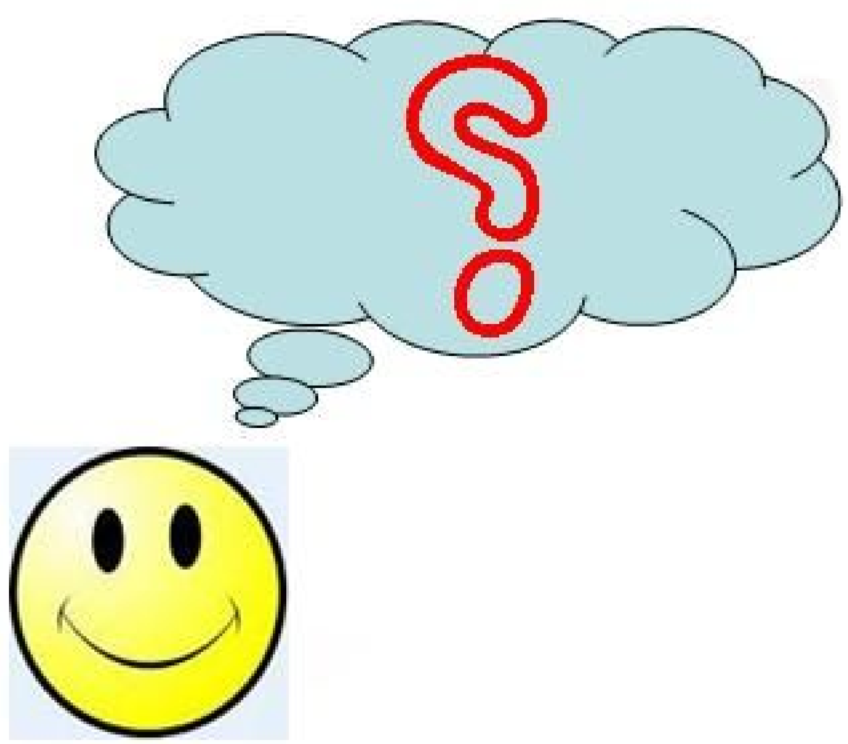
❶ و ❷ $$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ -3a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

$$3a + b = 0 \xRightarrow{b=6} 3a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0} \left((x-1)\operatorname{sgn}(x)\right)$$



راه حل:

$$\lim_{x\to 0}\left[\,(x-1)\operatorname{sgn}(x)\,\right]=\lim_{x\to 0}(x-1)\cdot\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$$

حد راست

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\,(x-1)\operatorname{sgn}(x)\,\right]=\lim_{x\to 0^+}(x-1)\cdot\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=(-1).1=-1$$

حد چپ

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\,(x-1)\operatorname{sgn}(x)\,\right]=\lim_{x\to 0^-}(x-1)\cdot\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=(-1).(-1)=1$$

پس حد ندارد .

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 4} [x]$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 4} [x] = ?$$

حد راست
$$\lim_{x \to 4^+} [x] = [4^+] = 4$$

حد چپ
$$\lim_{x \to 4^-} [x] = [4^-] = 3$$

پس حد ندارد .

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 3} \left([x] + [4 - x] \right)$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 3} \left([x] + [4 - x] \right)$$

حد راست

$$\lim_{x \to 3^+} \left([x] + [4 - x] \right) = [3^+] + [4 - 3^+] = 3 + 0 = 3$$

حد چپ

$$\lim_{x \to 3^-} \left([x] + [4 - x] \right) = [3^-] + [4 - 3^-] = 2 + 1 = 3$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{[x]-1}{x-1}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{[x]-1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{[x]-1}{x-1} = \frac{[1^+]-1}{1^+-1} = \frac{1-1}{1^+-1} = \frac{0}{0^+} = 0$$

زیرا صورت صفر مطلق است ولی مخرج بزرگتر از صفر می باشد .

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}\right) . \tan\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}\right) . \tan\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$$

$$= \left(\sqrt{\cos 0 - \frac{1}{2}}\right) . \tan\left(\frac{\pi}{4}(0+1)\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} . \tan\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left[x + \frac{1}{2}\right]}{x} = 0$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x} = 0$$

باید نشان دهیم $\lim_{x \to 0^+} \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x} = 0$

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x} = 0$

$x > 0 \Rightarrow$ همسایگی $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x} = 0$$

2. $$\lim_{x \to 0^-} \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x}=0$$

$x<0 \Rightarrow$ همسایگی $\frac{-1}{2}<x<0 \Rightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right]=0 \Rightarrow \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x}=0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\left[x+\frac{1}{2}\right]}{x}=0$$

قضیه:

اگر $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ و تابع g در همسایگی a کراندار باشد در این صورت

$$\lim_{x \to a} f(x).g(x) = 0$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right) Arc\sin x$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)Arc\sin x$$

به ازای هر عدد حقیقی x

$$0 \le x-[x]<1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]<1$$

$$\lim_{x \to 0} Arc\sin x = 0$$

در نتیجه حاصل حد فوق برابر صفر است (بنا به قضیه)

مثال)

اگر $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$ آنگاه حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0} \left(f(x)+1\right) \sin \frac{\pi}{x^2}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0}(f(x)+1)\sin\frac{\pi}{x^2} = ?$$

بافرض $g(x)=\sin\frac{\pi}{x^2}$ پس $|g(x)| \le 1$ یعنی $g(x)$ کراندار است.

$$h(x) = f(x)+1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0}(f(x)+1) = -1+1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} h(x)g(x) = \lim_{x \to 0}(f(x)+1)\sin\frac{\pi}{x^2} = 0$$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

$g(x)=\sin\frac{1}{x}$ تابعی کرندار $|\,g(x)\,| \le 1$

و $\lim_{x \to 0} x = 0$

پس بنا بر قضیه

$$\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

قضیه فشار (ساندویچ)

اگر در یک همسایگی محذوف a توابع $f(x)$ و $g(x)$ تعریف شده و بر این بازه

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L \quad \text{و} \quad h(x) \le f(x) \le g(x)$$

آنگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$
\begin{array}{lccc}
 & h(x) \leq & f(x) \leq & g(x) \\
x \to a & \downarrow & \Big\downarrow & \downarrow \\
 & L & \Big\downarrow & L \\
 & & L &
\end{array}
$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

$$\forall x \neq 0 \qquad \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$$

$$x > 0 \Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq x \times \frac{1}{x} \Rightarrow \quad 1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

$$x < 0 \Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{x} - 1\right) > x\left[\frac{1}{x}\right] \geq x \times \frac{1}{x} \Rightarrow \quad 1 - x > x\left[\frac{1}{x}\right] \geq 1$$

و $\lim_{x \to 0} (1 - x) = 1$ و $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ پس بنا به قضیه فشار

$$\lim_{x \to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$\longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

مثال)

اگر در یک همسایگی محذوف صفر ، داشته باشیم

$$x^4 \le f(x) \le x^2$$

آنگاه مطلوب است :

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^4 = 0$$

قضیه فشار

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

مثال)

اگر در یک همسایگی **محذوف 3** ، داشته باشیم

$$|f(x)-2| \le (x-3)^2$$

آنگاه مطلوب است :

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

راه حل:

$$|f(x)-2| \leq (x-3)^2 \Rightarrow \quad 2-(x-3)^2 \leq f(x) \leq (x-3)^2+2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} [2-(x-3)^2] = 2 \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x \to 3} [(x-3)^2+2] = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بنا به قضیه فشار}} \lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

توجه:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} 2$$ (با کمک جدول)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} 3$$ (با کمک جدول)

جوابها متفاوت $\rightarrow$ مبهم

هدف: بررسی روش های رفع ابهام

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

مهمترین کار ← حذف عامل صفر کننده صورت و مخرج یعنی $x-a$

چگونه؟

با کمک

۱- تقسیم و صورت مخرج بر $x-a$

۲- تجزیه کردن

۳- اتحاد

٤- هم ارزی

توجه: گاهی اوقات مجبوریم بیش از یکبار اعمال فوق را تکرار کنیم.

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x^2 + x + 1)}{(x-3)(4x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + x + 1}{4x^2 - x + 1} = \frac{(\ 2 \times 9\ ) + 3 + 1}{(\ 4 \times 9\ ) + 3 + 1} = \frac{22}{34} = \frac{11}{17}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} =$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5} = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-6x+5} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-1)} = \frac{1}{(-4)(1+1+1)} = \frac{-1}{12}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} \times \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\cos x\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\cos x\sqrt{1+\sin x}}{-\cos x} = -\sqrt{2} \\[2em]
\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\cos x\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} \frac{\cos x\sqrt{1+\sin x}}{\cos x} = \sqrt{2}
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

حد موجود نیست

قضیه :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{Arc\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{Arc\tan x}{x} = 1$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

راه حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5}\sin 3x}{\frac{3}{5}\times 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\times\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$$

$3x=t$ وقتی 0 $x\to 0 \Leftarrow t\to 0$

$$L=\frac{3}{5}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{5}\times 1=\frac{3}{5}$$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

راه حل:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

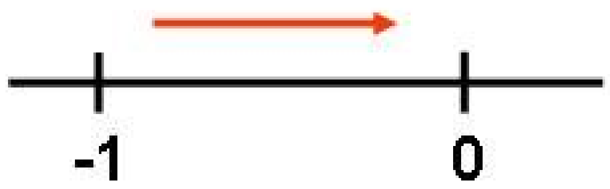
$$=1\times\frac{0}{1+1}=1\times 0=0$$

حد بی نهایت

$$\infty$$

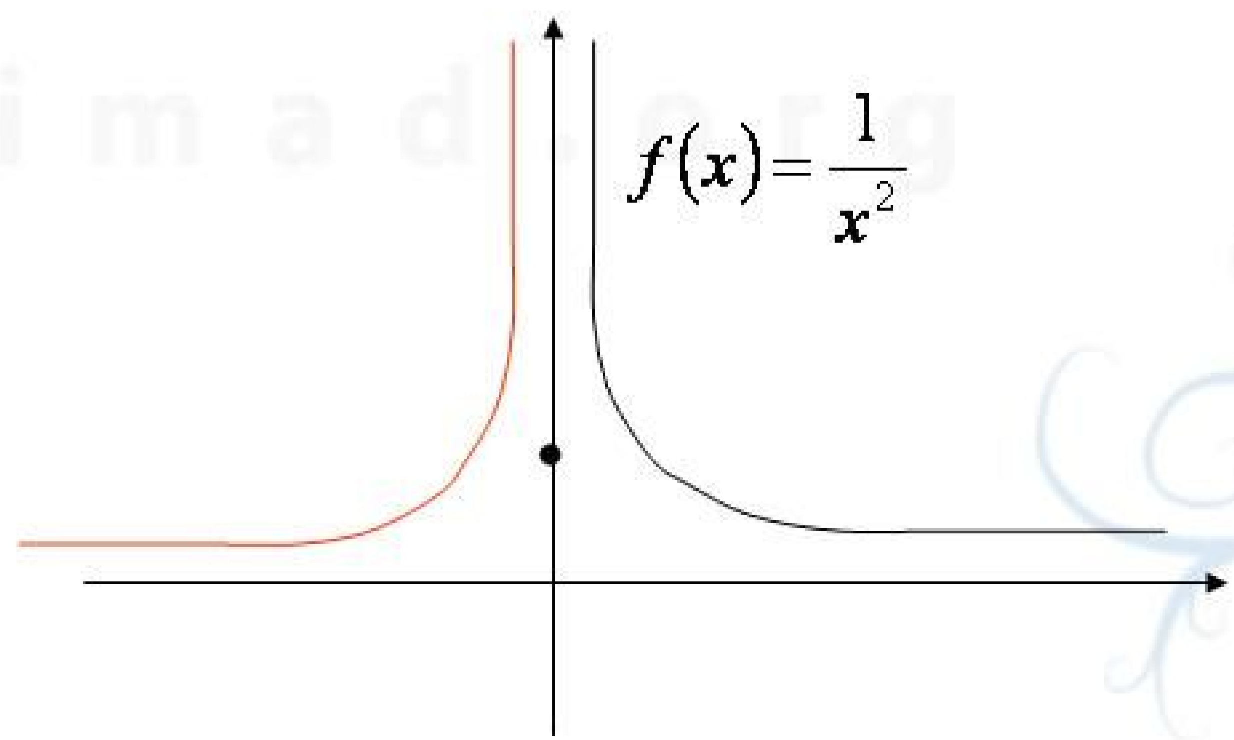
نمادی که اولین بار جان والیس در سال 1655 بکار برد

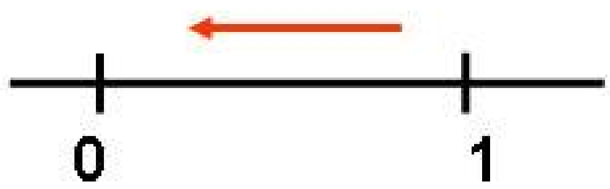
$f(x)=\frac{1}{x^2}$ در حول نقطه صفر



x	-1	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001 \longrightarrow 0$
$f(x)$	1	100	10000	$1000000 \longrightarrow +\infty$

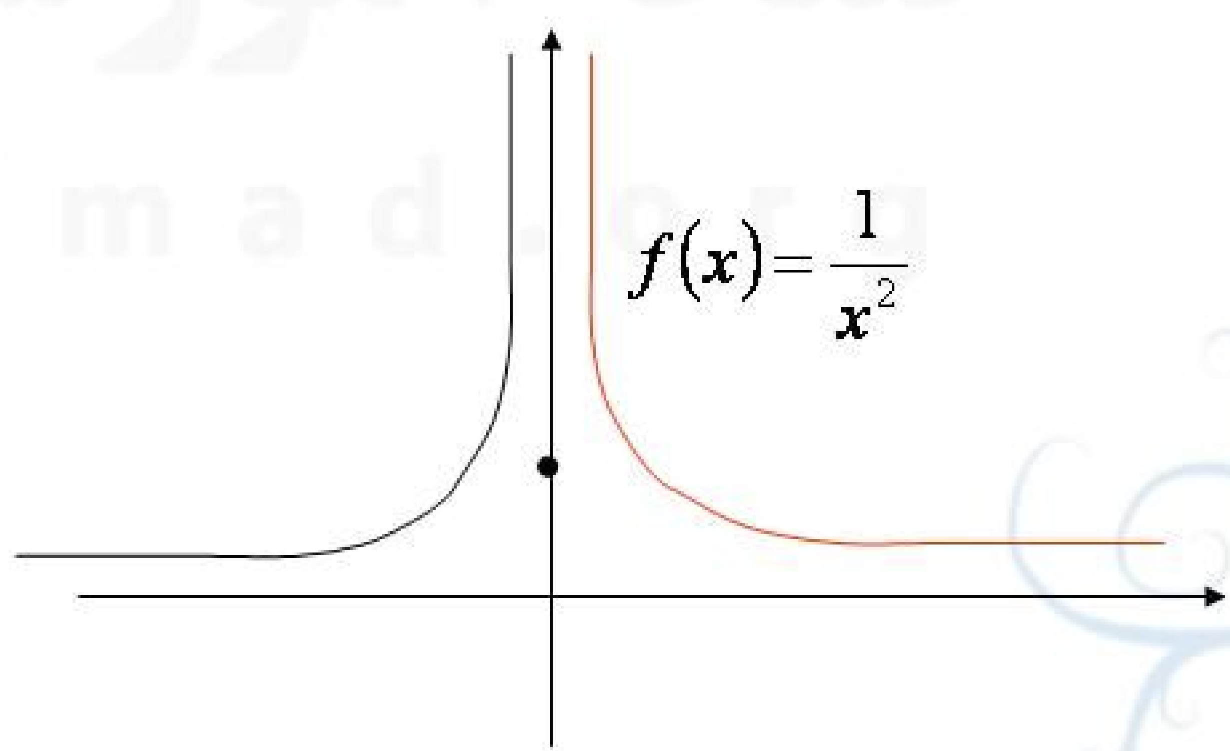
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$





x	1	0/1	0/01	0/001 $\longrightarrow$ 0
$f(x)$	1	100	10000	1000000 $\longrightarrow$ $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

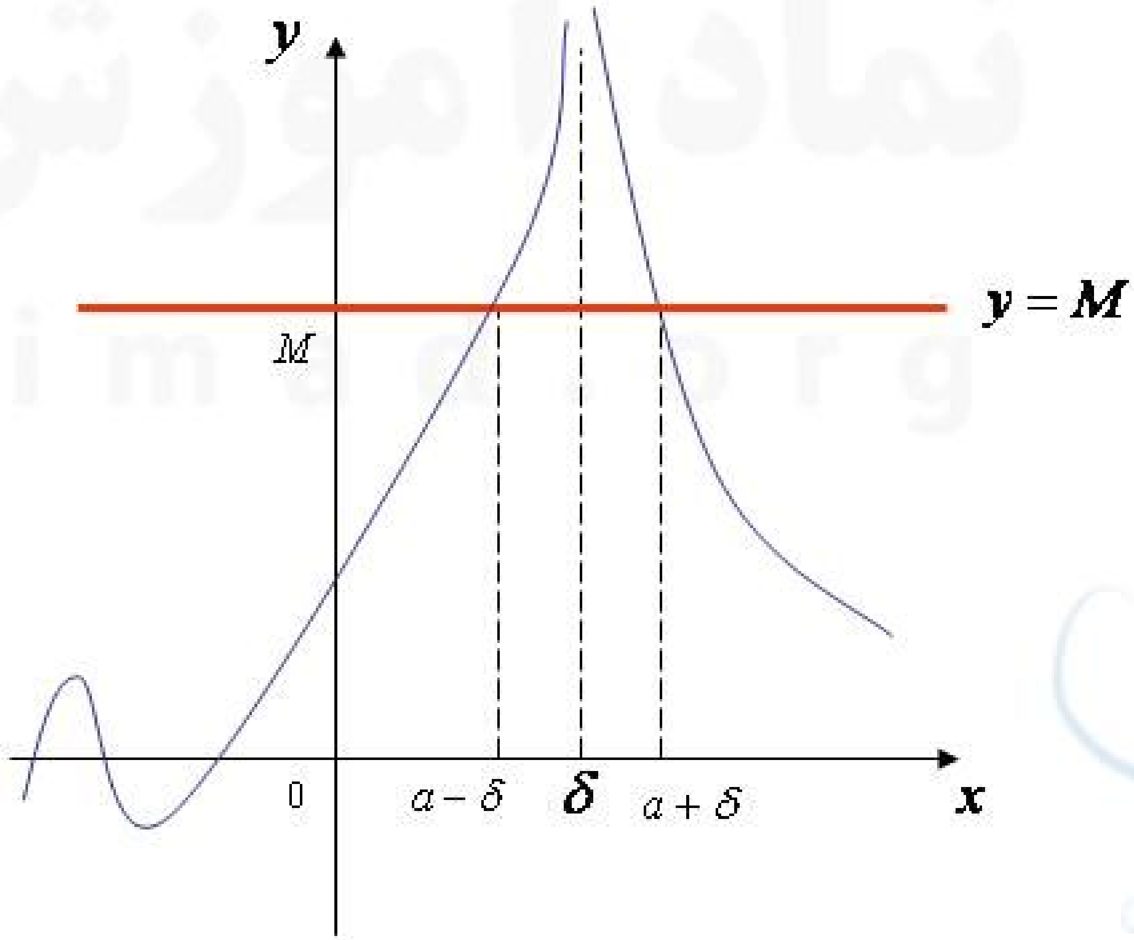


تعریف :

اگر f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in D_f ; \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

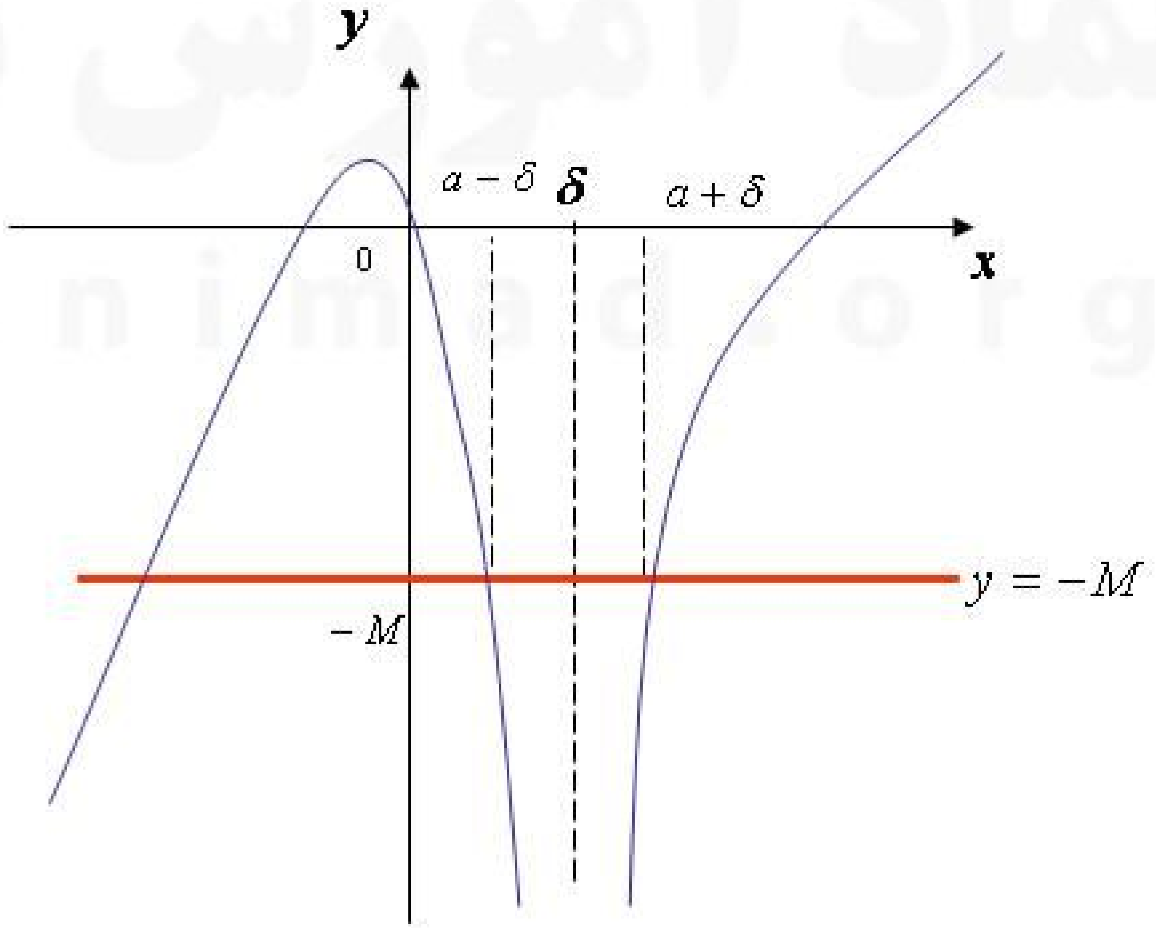


تعریف :

اگر f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f; \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

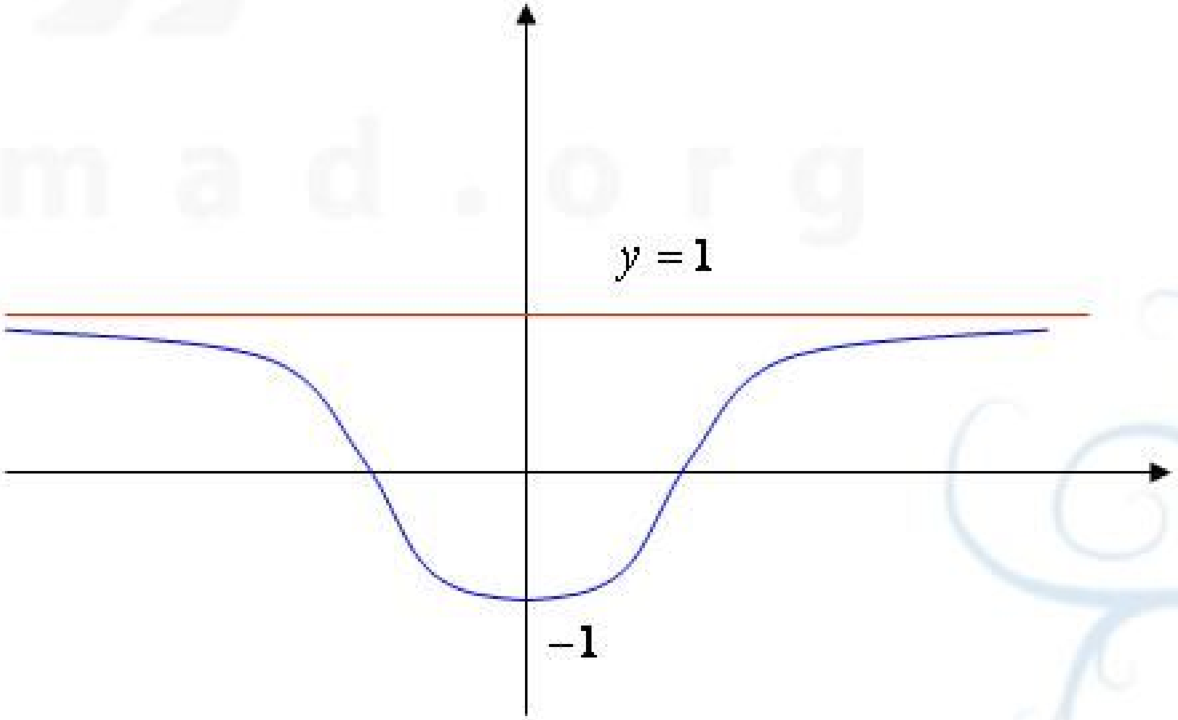


حد در بی نهایت

تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ را در نظر بگیرید.

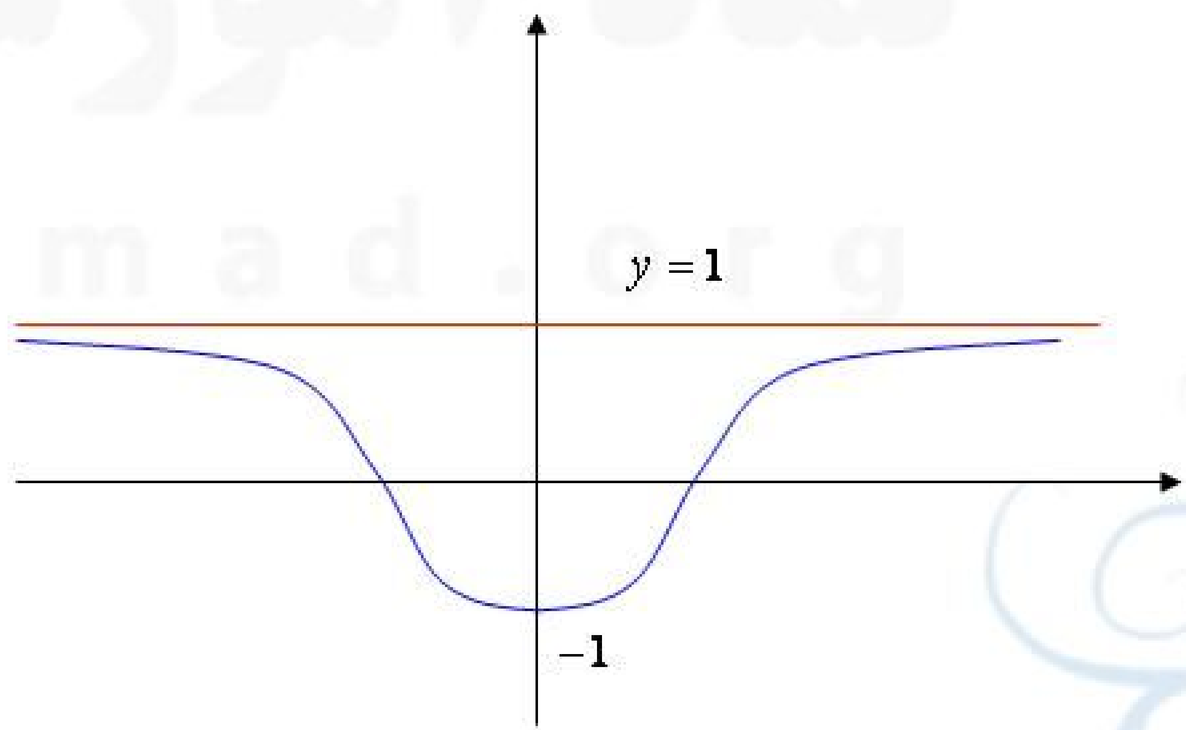
x	0	1	5	100	1000 $\longrightarrow +\infty$
$f(x)$	-1	0	0.92	0.999	0.9999 $\longrightarrow 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$



x	0	-1	-5	-100	$-1000 \longrightarrow -\infty$
$f(x)$	-1	0	0.92	0.999	$0.9999 \longrightarrow 1$

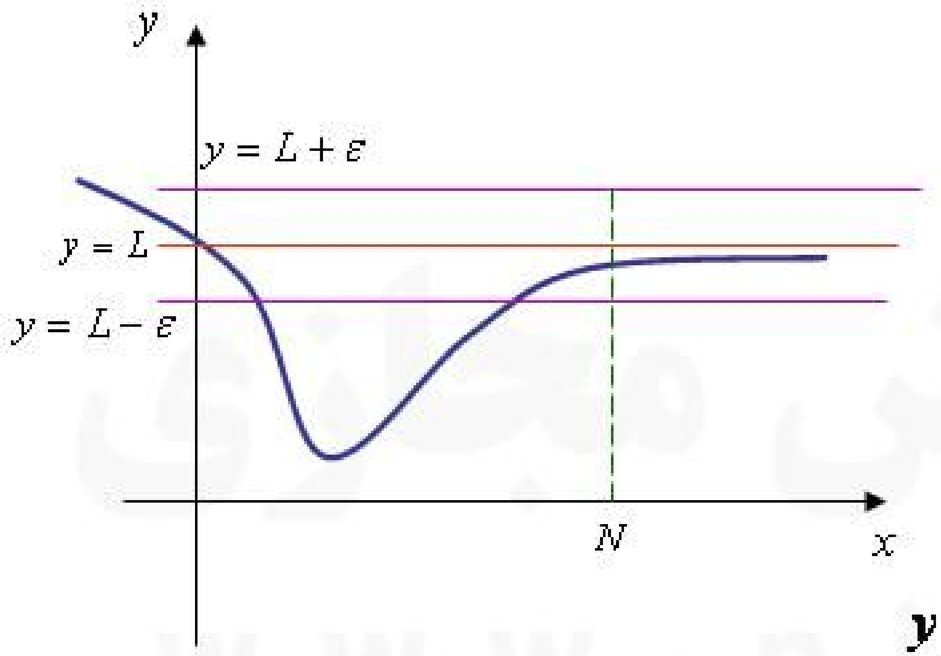
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

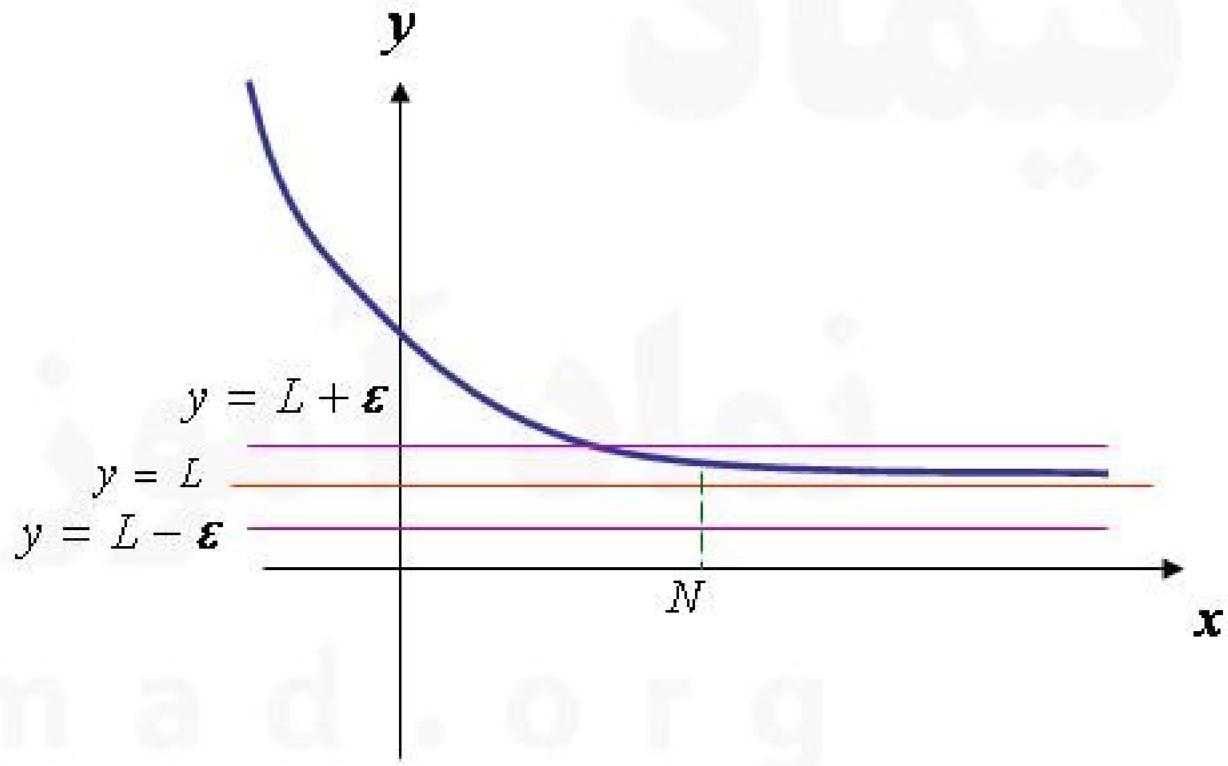


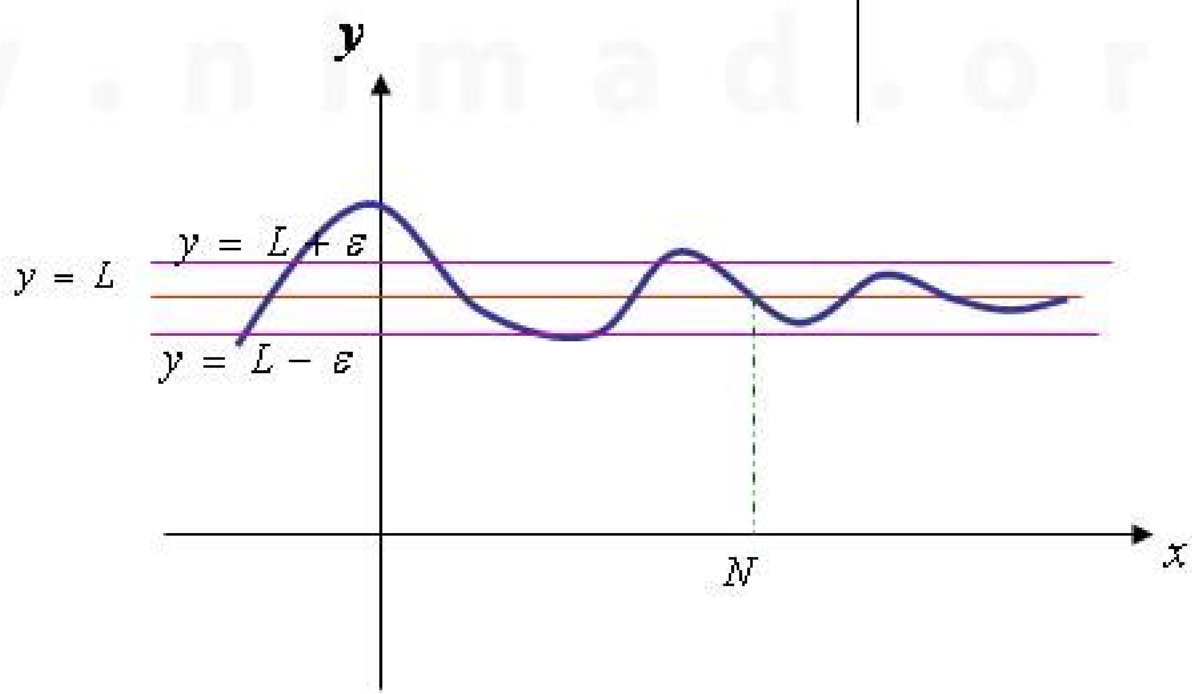
تعریف :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N > 0 \qquad x > N \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$



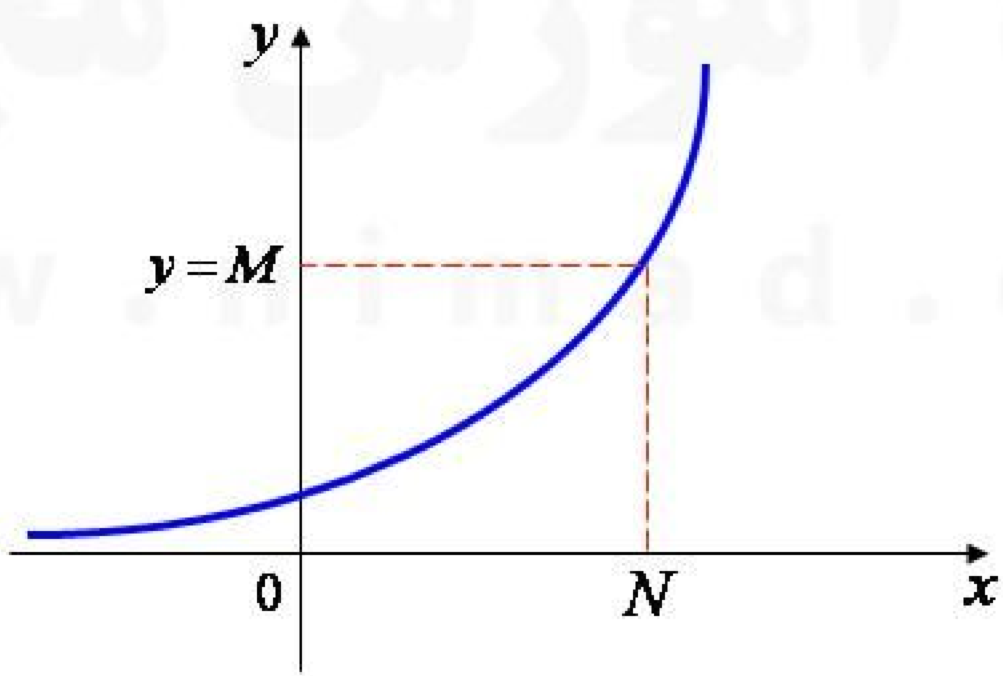




$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

تعریف شده $f:(a,+\infty)$

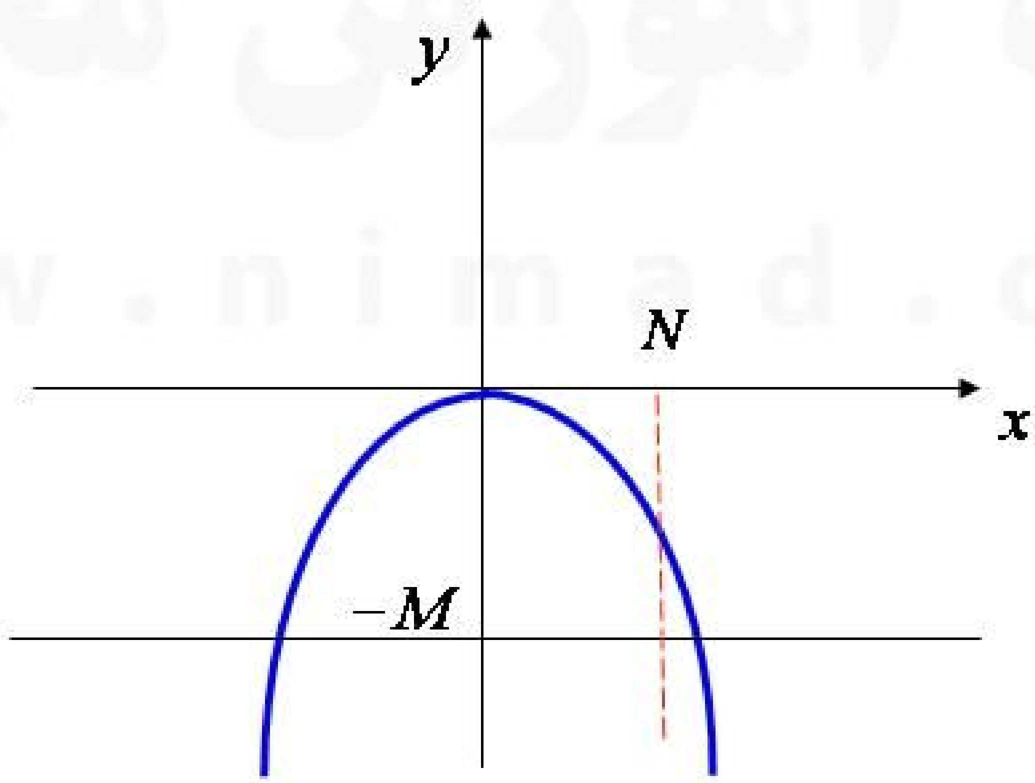
$$\forall M > 0 \qquad \exists N > 0 \quad x > N \Rightarrow \ f(x) > M$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

تعریف شده $f:(a,+\infty)$

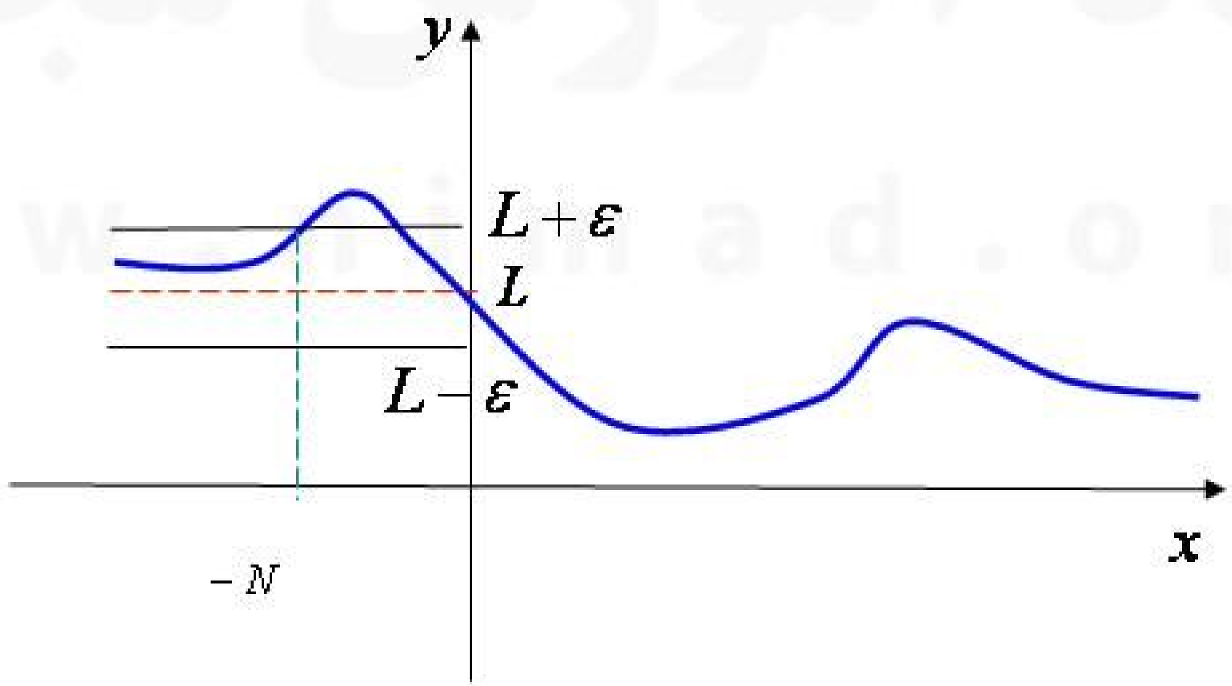
$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \qquad x > N \Rightarrow f(x) < -M$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

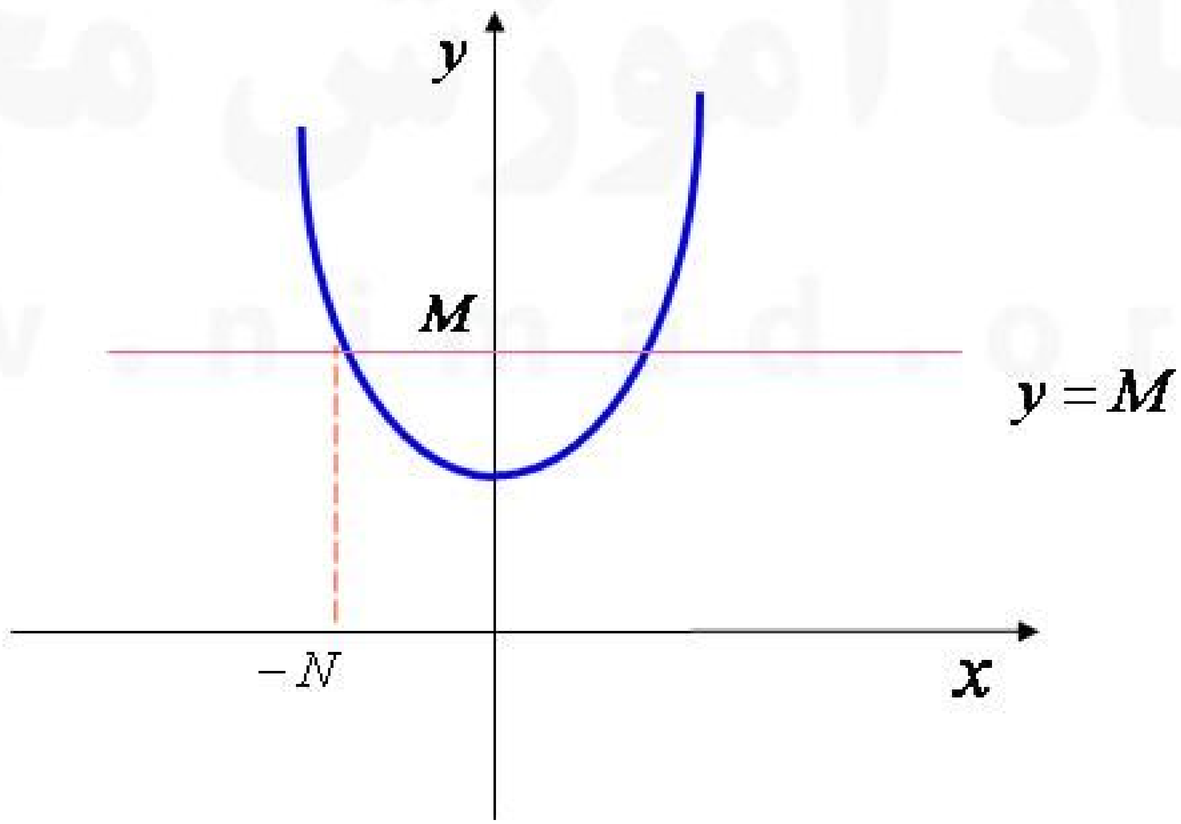
$f:(-\infty, a)$ تعریف شده

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad x > -N \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$$



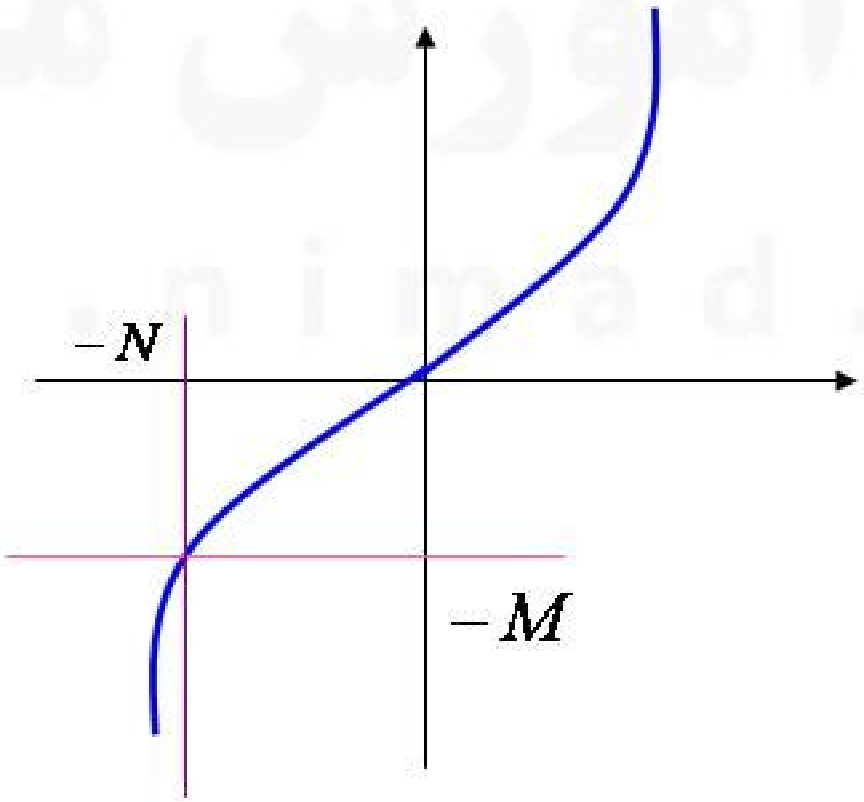
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad x > N \Rightarrow \quad f(x) > M$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad x > N \Rightarrow \; f(x) < -M$$



مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to 1} \frac{-3}{(x-1)^4} = -\infty$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{-3}{(x-1)^4} = -\infty$$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad ,0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \quad \frac{-3}{(x-1)^4} < -M$$

$$\frac{-3}{(x-1)^4} < -M \quad \Rightarrow \frac{-3}{(x-1)^4} > M \Rightarrow \quad (x-1)^4 < \frac{3}{M}$$

$$\Rightarrow (x-1)^4 < \sqrt{\frac{3}{M}} \qquad \Rightarrow (x-1)^4 < \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$$

پس $\delta \leq \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos x}{x + \pi} = 0$$

راه حل:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos x}{x+\pi} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N > 0 \qquad \left(\forall x; x < -N \Rightarrow \left| \frac{\cos x}{x+\pi} \right| < \varepsilon \right)$$

$$\left| \frac{\cos x}{x+\pi} \right| \le \frac{1}{|x+\pi|} = \frac{-1}{x+\pi} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad x+\pi < \frac{-1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x < -\left(\frac{1}{\varepsilon} + \pi \right)$$

پس اگر $N \ge \frac{1}{\varepsilon} + \pi$ حکم برقرار است.

مثال)

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

راه حل:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \qquad \left(\forall x ; x > N \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon \right)$$

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

پس کافی است $\boxed{N \geq \frac{1}{\varepsilon}}$

مثال)

درستی حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x^2 - 4x}\right) = -\infty$$

راه حل:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(-\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty$$

$$\forall M > 0 \qquad \exists N > 0 \qquad x > N \;\Rightarrow f(x) < -M$$

$$f(x) < -M \Rightarrow \; -\sqrt{x^2-4x} < -M \Rightarrow \quad \sqrt{x^2-4x} > M$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x > M \qquad \Rightarrow (x-2)^2 - 4 > M^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 > 4 + M^2 \qquad \Rightarrow |x-2| > \sqrt{4+M^2}$$

چون $x \to +\infty \Rightarrow \; |x-2| = +(x-2) > \sqrt{4+M^2}$

$$\Rightarrow x > 2 + \sqrt{4+M^2} \Rightarrow \quad N \geq 2 + \sqrt{4+M^2}$$

در نظر بگیریم

جمع بندی:

$$f(x)=\begin{cases} L \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$x \to a$

$$f(x)=\begin{cases} L \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$x \to +\infty$

$$f(x)=\begin{cases} L \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$x \to -\infty$

قضایای اساسی حد در بی نهایت:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1$$

و L_1 و L_2 متناهی

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L_2$$

کلیه قوانین اساسی در یک نقطه برقرار است

برای مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=L_1+L_2$$

قضایای اساسی حد در بی نهایت:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_1$$

و L_1 و L_2 متناهی

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = L_2$$

کلیه قوانین اساسی حد در یک نقطه برقرار است

برای مثال:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0)$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \sin 0 = 0$$

قضایای اساسی

حد بی نهایت

توجه:

۱) همه بی نهایت ها هم علامت هستند.

زیرا حالت $(\infty - \infty)$ مبهم می باشد.

$+$	L_2	∞
L_1	L	∞
∞	∞	∞

مثال) $L + (-\infty) = -\infty$

مثال) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$$(+\infty) + (-\infty) \to \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \to \frac{1-1}{0} \to \frac{0}{0}$$ مبهم

توجه:

۱) بی نهایت ها هم علامت هستند.

۲) $(-)\infty$ بدین معناست که یک منفی در علامت

بی نهایت اولیه باید ضرب شود.

∞	L_2	$-$
$(-)\infty$	L	L_1
مبهم	∞	∞

مثال) $(-\infty)-(-\infty)=-\infty+\infty$ مبهم

مثال) $L_1-(-\infty)=L_1+\infty=+\infty$

مثال) $+\infty-L_2=+\infty$

توجه ۱) $\pm\infty$ بدین معناست که علامت بستگی به هر دو عامل حاصل ضرب دارد.

$$(+2)(-\infty) = -\infty \quad , \quad (-2)(-\infty) = +\infty \quad , \quad (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

توجه ۲)

$$0\times\infty \to 0\times\frac{1}{0} \to \frac{0}{0}$$ مبهم

$\times$	0	$L_2 \neq 0$	∞
0	0	0	مبهم
$L_1 \neq 0$	0	L	$\pm\infty$
∞	مبهم	$\pm\infty$	$\pm\infty$

توجه ۱) $\pm\infty$ بدین معناست که علامت بستگی به عبارت صورت و مخرج کسر دارد.

$$\frac{3}{0^+} = +\infty \quad , \quad \frac{3}{0^-} = -\infty$$

توجه ۲)

$$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} \rightarrow \frac{0}{0}$$ مبهم

$\div$	0	$L_2 \neq 0$	∞
0	مبهم	0	0
$L_1 \neq 0$	$\pm\infty$	L	0
∞	$\pm\infty$	$\pm\infty$	مبهم

قضیه حد چند جمله ای در بی نهایت:

$$\lim_{n\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{n\to\infty}a_nx^n=\pm\infty$$

$\pm\infty$ بدین معناست که جواب حد بستگی به علامت ∞ و علامت a_n و n مقدار دارد.

مثال ۱)

$$\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{x^2-x})=-\sqrt{(-\infty)^2-(-\infty)}=-\sqrt{\infty+\infty}=-\infty$$

مثال ۲)

$$\lim_{x\to-\infty}(-2x^4-x+4)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^4)=-2(-\infty)^4=-\infty$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to -3} \frac{4x}{9 - x^2}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to -3} \frac{4x}{9 - x^2} = \frac{-12}{9 - 9} = \frac{-12}{0}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{4x}{9 - x^2} = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$

حد وجود ندارد

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{4x}{9 - x^2} = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

راه حل:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{\lim\limits_{x\to 3^+}2x}{\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-9}}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to (-3)^-} \frac{1+2x}{\sqrt{x^2-9}}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to (-3)^-} \frac{1+2x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{[x] - x}{3 - x}$$

راه حل:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-x}{3-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 3^-}[x]-\lim\limits_{x\to 3^-}x}{\lim\limits_{x\to 3^-}3-\lim\limits_{x\to 3^-}x}=\frac{2-3}{3-3}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{[x^2] - 4}{x^2 - 4}$$

راه حل:

$x \to 2^-$

$$x < 2 \Rightarrow \sqrt{3} < x < 2 \Rightarrow 3 < x^2 < 4 \Rightarrow [x^2] = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{[x^2]-4}{x^2-4} = \frac{3-4}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$$

راه حل:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}-1}\times\frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{\sqrt{2x-x^2}+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}{2x-x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1)}{-(x-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{2x-x^2}+1}{-x+1}=\frac{1^+}{0^-}=-\infty$$

استاد

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{x - 8} = \infty$$

****

دانشجو

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x - 5} = 5$$

Indeterminate

صور مبهم

form

$\infty - \infty$

$\dfrac{\infty}{\infty}$

$\dfrac{0}{0}$

$0 \times \infty$

∞^0

1^∞

0^0

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

مهمترین کار ← حذف عامل صفر کننده صورت و مخرج یعنی $x-a$

چگونه؟

با کمک

۱- تقسیم و صورت مخرج بر $x-a$

۲- تجزیه کردن

۳- اتحاد

٤- هم ارزی

از روش های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می توان کمک گرفت

$$\frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{قابل تبدیل}} \frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$$

نکته)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ 0 & n<m\\ +\infty \ or \ -\infty & m<n\end{cases}$$

مثال)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+3x^3-2}{5x^2-6x^4+1}=\frac{4}{-6}=\frac{-2}{3}$$

مثال)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+\sqrt{x+3}}{5x+\sqrt{3x-2}}=\frac{4}{5}$$

مثال)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^7-2x^3+4}{5-3x^3+6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^7}{-3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4}{-3}=-\infty$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x(1+\frac{4}{x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t+1}}$$

راه حل:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t+1}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t}\sqrt{1+\frac{1}{t}\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t}\sqrt{1+\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}=1$$

مثال)

با فرض $x > ۱$ حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{[x] + [x^2] + \cdots + [x^n]}{x^n}$$

راه حل:

$$\forall x \in R \qquad x^k - 1 < [x^k] \le x^k$$

$$x - 1 < [x] \le x$$

$$x^2 - 1 < [x^2] \le x^2$$

$$\vdots$$

$$x^n - 1 < [x^n] \le x^n$$

$$(x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1) < [x] + [x^2] + \cdots + [x^n] \le x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$\xrightarrow{\div x^n}$$

$$\underbrace{\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x^n}}_{A} < \frac{[x]+[x^2]+\cdots+[x^n]}{x^n} \le \underbrace{\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{x^n}}_{B}$$

B $$\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x(1-x^n)}{1-x}}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{x^n(1-x)}=\frac{-x}{1-x}=\frac{x}{x-1}$$

A $$\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+x^2+\cdots+x^n)-(1+1+\cdots+1)}{x^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{x^n}-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^n}$$

$$=\frac{x}{x-1}-0=\frac{x}{x-1}$$

پس بنا به قضیه فشار

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[x^2]+\cdots+[x^n]}{x^n}=\frac{x}{x-1}$$

رفع ابهام $0\times\infty$

از روش های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می توان کمک گرفت

$$0\times\infty \longrightarrow 0\times\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{0}{0}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to -1}\left((x^2-1)\cot(x+1)\right)$$

راه حل:

$$\lim_{x\to -1}\left[\ (x^2-1)\cot(x+1)\ \right]=0\times\infty$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\dfrac{1}{\cot(x+1)}}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\tan(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{\tan(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2$$

هم ارزی

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to 0^+} \left([x] \cot x \right)$$

راه حل:

$$\lim_{x\to 0^+}\left([x]\cot x\right)=0\times\infty$$

$\lim_{x\to 0^+}[x]=0$ دقیقاً صفر است (صفر حدی نیست)

$\lim_{x\to 0^+}\cot x=\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left([x]\cot x\right)=0$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\tan 2x . \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

راه حل:

تغییر متغیر $x = t + \frac{\pi}{4}$

$$x \to \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad t \to 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\tan 2x . \tan(x - \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\tan 2(t + \frac{\pi}{4}) . \tan t \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\tan(2t + \frac{\pi}{2}) . \tan t \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} (-\cot 2t . \tan t) = \lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{-\tan 2t} = -\frac{1}{2}$$

رفع ابهام $\infty - \infty$

$$\infty - \infty \longrightarrow \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

کمک از رفع ابهام

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$$

راه حل:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 1}\right)$$

راه حل:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^3 + x) - (x^3 + 1)}{\left(\sqrt[3]{(x^3 + x)^2} + \sqrt[3]{x^3 + x}\,.\,\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{x^2\left(\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{x^2})^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}}\right)} = 0$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$$

راه حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right).\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{1}{2t}=0 \qquad \left(t=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$$

بررسی حد توابع دو ضابطه ای

توجه (۱) وجود یا عدم وجود $f(a)$ در $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ تأثیر ندارد.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x>a \\ f_2(x) & x<a \end{cases}$$

توجه (۲)

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f_1(x) \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f_2(x) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in Z \\ f_2(x) & x\notin Z \end{cases}$$

توجه (۱)

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)$$

(a عدد حقیقی است، $a\in Z$ یا $a\notin Z$)

توجه (۲) در محاسبه حد، به هیچ وجه از ضابطه $f_1(x)$ استفاده نمی کنیم.

توجه (۳) در بی نهایت باید هر دو ضابطه f_1 و f_2 محاسبه شوند در واقع

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ وجود ندارد $\longrightarrow$ $\lim_{x\to\infty} f_1(x)=\lim_{x\to\infty} f_2(x)$

توجه :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in Q \\ f_2(x) & x\notin Q \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود دارد $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

گنگ و گویا بودن a هیچ تأثیری در محاسبه حد ندارد.

مثال)

حدتابع زیر را در نقطه $x = 1$ دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x^3+1} & x<-1\\[2ex] 2^{\cos\pi x} & x>-1\end{cases}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} 2^{\cos \pi x} = 2^{\cos(-\pi)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{|(x-1)(x+1)|}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \to (-1)^-} \frac{|x-1||x+1|}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-(x-1).(-(x+1))}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{-2}{1+1+1} = \frac{-2}{3}$$

	$\rightarrow$ -1	
$x+1$	$-$	$+$

	$\rightarrow$ 1	
$x-1$	$-$	$+$

مثال)

با فرض $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$ مطلوب است محاسبه $b + c$

$$f(x) = \begin{cases} a\sin\dfrac{\pi x}{3} + b & x \geq 3 \\ \\ \dfrac{cx^2}{x+1} & x < 3 \end{cases}$$

راه حل:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{c\,x^2}{x+1} = \frac{9c}{4} = 3 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(a\sin\frac{\pi x}{3} + b \right) = a\sin\pi + b = b \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

$$b + c = 3 + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$$

مثال)

حاصل حدود زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2x-1} & x\in Z\\ \left|x-2\sin x\right| & x\notin Z\end{cases}$$

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

راه حل:

الف

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|x-2\sin x|=\left|\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}\right|=\left|\frac{\pi}{2}-2\right|=2-\frac{\pi}{2}$$

ب

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}|x-2\sin x|=0$$

مثال)

حدتابع زیر را در نقطه $x=1$ دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{Arctan}\ 2x & x\in Z \\ \dfrac{x}{x-1} & x\notin Z \end{cases}$$

راه حل:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

مثال)

حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\cos x}{2x} & x\notin Z\\[2ex] \dfrac{x^2}{2x^2-1} & x\in Z\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

راه حل:

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{x}\right)=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}\\[3em]
\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}}{2x^{2}-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{x^{2}}}=\dfrac{1}{2}
\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$$

مثال)

تابع $f(x)$ در چند نقطه حد دارد؟

$$f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\in Q\\ x^2-1 & x\notin Q\end{cases}$$

راه حل:

فرض کنیم $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجود باشد.

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a}(2x-2) = 2a-2$$

$$\lim_{x \to a} f_2(x) = \lim_{x \to a}(x^2-1) = a^2-1$$

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x) \quad \Rightarrow \quad 2a-2 = a^2-1 \quad \Rightarrow \quad a^2-2a+1=0$$

$$\Rightarrow \quad (a-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 1$$

فقط در یک نقطه $x = ۱$ حد دارد.