درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

توابع گویا

تعریف تابع گویا تابعی است که ضابطه‌اش را بتوان به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ نوشت به طوری که $p(x)$ و $g(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند و $g(x)\neq 0$ (یعنی $g(x)$ چندجمله‌ای صفر نباشد).

مثلاً توابع $y=\frac{x-2}{x+1}$ و $y=\frac{\sqrt{3}}{x+5}$ و $y=5x^2$ نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

دامنه توابع گویا

دامنه تابع گویا با ضابطهٔ $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ برابر مجموعه اعداد حقیقی است، به جز ریشه‌های مخرج کسر. به بیان دیگر:

$D_f=\mathbb{R}-\{x\mid g(x)=0\}$

مثال دامنهٔ هر یک از توابع گویای زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-3x}$ ب) $g(x)=\sqrt{2}x$ ج) $h(x)=\frac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x-2}}$

پاسخ الف) باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف کنیم:

$x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=3$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,3\}=(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$

ب) اگر تابع $g(x)=\sqrt{2}x$ را به صورت $g(x)=\frac{\sqrt{2}x}{1}$ بنویسیم، می‌بینیم مخرج کسر هیچ‌وقت صفر نمی‌شود $1\neq 0$، پس دامنه تابع کل مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی $D_g=\mathbb{R}$.

ج) در این تابع باید $x\neq 2$ باشد (به دلیل وجود $\frac{1}{x-2}$) و نیز $x\neq 0$ باشد (به دلیل وجود $\frac{1}{x}$) همچنین باید $2-\frac{1}{x-2}\neq 0$ یعنی:

$2\neq\frac{1}{x-2}\Rightarrow 2x-4\neq 1\Rightarrow 2x\neq 5\Rightarrow x\neq\frac{5}{2}$

پس دامنه این تابع برابر است با: $D_h=\mathbb{R}-\{0,2,\frac{5}{2}\}$

نکته در توابع گویا صورت و مخرج کسر با هم ساده می‌شوند. ولی قبل از تعیین دامنه تابع مجاز به ساده کردن صورت و مخرج نیستیم، چون ممکن است مقادیری که تابع را تعریف نشده می‌کنند از بین بروند.

مثلاً در تابع گویای $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-2x}$ اگر ابتدا تابع را ساده کنیم و سپس دامنه را بیابیم، داریم:

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}}=\frac{x+2}{x}\xrightarrow[x=0]{\text{ریشه مخرج}}D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

دامنه به دست آمده غلط است، چون $x=2$ مخرج تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-2x}$ را صفر می‌کند و تابع به ازای این مقدار تعریف نشده است. وقتی تابع را ساده کردیم، این مقدار از بین رفت. پس دامنه اصلی تابع به صورت زیر است:

$x^2-2x=0\to x(x-2)=0\to x=0,x=2\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,2\}$

مثال دامنه توابع گویای زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{(3x+1)}{(3x+1)(x-2)}$ ب) $g(x)=\frac{|x-1|}{|x-1|}$

پاسخ **الف** باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف کنیم:

$$(۳x+۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۱=۰ \to x=-\frac{۱}{۳} \\ \text{یا} \\ x-۲=۰ \to x=۲ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{۱}{۳},۲\}$$

ب همانند قسمت (الف) ریشه مخرج را به دست می‌آوریم و از $\mathbb{R}$ حذف می‌کنیم:

$$|x-۱|=۰ \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

مثال اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x+۳}{x^۲+ax+b}$ برابر $\mathbb{R}=-\{-۲\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

پاسخ با توجه به دامنه داده شده، ریشهٔ مخرج کسر فقط باید ۲- باشد. چون مخرج یک عبارت درجه ۲ است، در صورتی فقط یک ریشه دارد که آن ریشه مضاعف باشد، پس ۲- در واقع ریشهٔ مضاعف مخرج است. یعنی مخرج را می‌توان به صورت $(x+۲)^۲$ نوشت. پس:

$$x^۲+ax+b=(x+۲)^۲=x^۲+۴x+۴ \Rightarrow a=۴\,,\,b=۴ \Rightarrow a+b=۸$$

مثال اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{۵x^۲+۳x}{ax^۲+bx+c}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت دامنه تابع $g(x)=f(x+۱)$ کدام است؟

پاسخ چون دامنه تابع گویای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس مخرج کسر فاقد ریشه است. با تشکیل تابع $f(x+۱)$ داریم:

$$g(x)=f(x+۱)=\frac{۵(x+۱)^۲+۳(x+۱)}{a(x+۱)^۲+b(x+۱)+c}$$

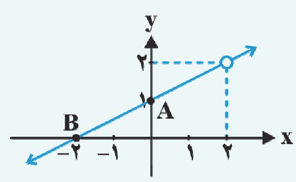
می‌توان گفت مخرج این تابع نیز ریشه ندارد، چون اگر مخرج تابع $g(x)$ ریشه‌ای مانند $x_۱$ داشته باشد، آن‌گاه $a(x_۱+۱)^۲+b(x_۱+۱)+c=۰$ و این بدین معنی است که $(x_۱+۱)$ ریشهٔ مخرج کسر $f(x)$ است که متناقض با فرض اولیه است.
پس مخرج تابع $g(x)$ نیز فاقد ریشه بوده و دامنه این تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{۲x-۴}$ را رسم کنید.

پاسخ ابتدا دامنه تابع را پیدا می‌کنیم و سپس تابع را ساده کرده و نمودار را رسم می‌کنیم به صورت زیر:

$$f(x)=\frac{x^۲-۴}{۲x-۴}=\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{۲\cancel{(x-۲)}}=\frac{۱}{۲}(x+۲) \qquad ۲x-۴=۰ \to x=۲ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

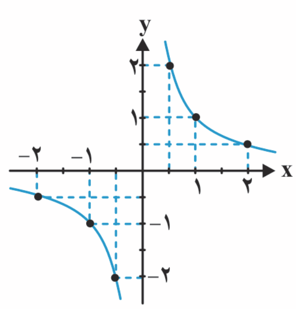
در واقع تابع داده شده یک تابع خطی است با دامنه $\mathbb{R}-\{۲\}$ که به راحتی می‌توان با تعیین دو نقطه دلخواه از آن نمودارش را رسم کرد.



$$f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲) \to \begin{cases} x=۰ \to y=۱ \Rightarrow A\begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix} \\ , \\ x=-۲ \to y=۰ \Rightarrow B\begin{vmatrix} -۲ \\ ۰ \end{vmatrix} \end{cases}$$

نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$

نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ با دامنه و برد $\mathbb{R}-\{۰\}$ به صورت مقابل است:

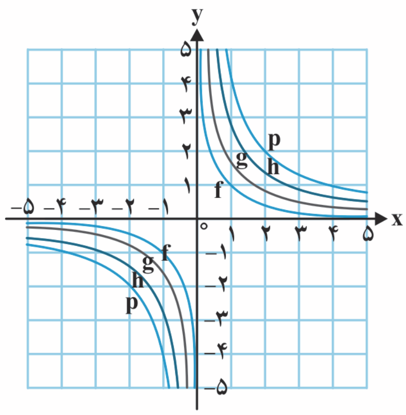


چند ویژگی نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$

- دامنه تابع $D=\mathbb{R}-\{۰\}$ و برد تابع $R=\mathbb{R}-\{۰\}$ است.
- نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند، چون به ازای هیچ مقدار x تابع $y=\frac{۱}{x}$ برابر صفر نمی‌شود.
- نمودار تابع محور yها را قطع نمی‌کند، چون $x=۰$ عضو دامنه نیست تا به ازای آن نمودار با محور yها برخورد کند.

نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{k}{x}$ $(k\in\mathbb{Z})$

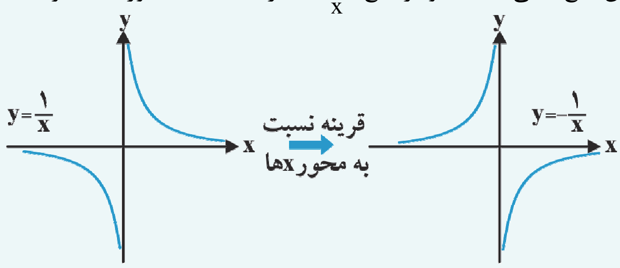
نمودار توابع $g(x)=\frac{۲}{x}$ و $h(x)=\frac{۳}{x}$ و $p(x)=\frac{۴}{x}$ و... همانند تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ است با این تفاوت که هر چه صورت کسر بزرگ‌تر می‌شود، انحنای منحنی کم‌تر می‌شود. مطابق شکل مقابل:



مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=-\frac{۱}{x}$ **ب)** $g(x)=\frac{۱+۲x}{x}$

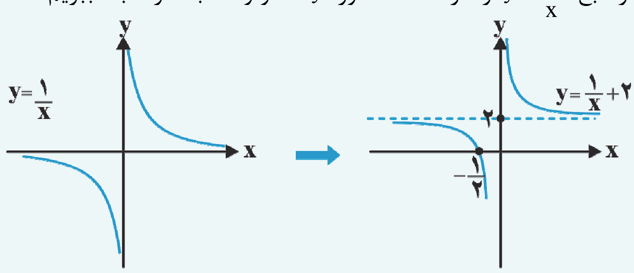
پاسخ **الف)** برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم، به صورت زیر:



ب) ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{۱+۲x}{x}=\frac{۱}{x}+\frac{۲x}{x}=\frac{۱}{x}+۲$$

برای رسم این تابع کافی است نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در امتداد محور yها دو واحد به طرف بالا ببریم:



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. تابع $f(x)=\frac{۲}{x+۲}$ با برد $\{-۱,۱,۲\}$ دارای چه دامنه‌ای است؟

۱) $\{-۴,۰,-۱\}$ ۲) $\{۱,۳,۴\}$ ۳) $\{۲,\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۲}\}$ ۴) $\{-۳,-۱,۰\}$

۲. اگر $f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{x^۲-۳}$ باشد، مقدار $f(۲-\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $-۲+\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۳. **مهم** اگر $f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۲+۲x+۴}$، آن‌گاه حاصل $f(-۲)+f(-۱)+f(۰)+f(۱)+f(۲)$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۸ ۳) -۶ ۴) -۴

۴. تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ مفروض است. اگر $f(a)+f(b)=۰$، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $a=-b$ ۲) $ab=۱$ ۳) $ab=-۱$ ۴) $a=\sqrt{b}$

۵. در یک رودخانه، هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی با ضابطهٔ $p(x)=\frac{۷۰۰x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود (برحسب میلیون تومان). با ۳۰۰ میلیون تومان، چند درصد از رودخانه پاک‌سازی می‌شود؟ (کتاب درسی)

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۷۰ ۴) ۹۰

۶. میزان رطوبت یک شهر، t ساعت پس از باران برابر با $f(t)=\frac{۰/۲۴t}{t^۲+۲}$ است. در چه زمانی پس از باران، میزان رطوبت بیش از ۰/۰۸ است؟ (کتاب درسی)

۱) در ساعت اول ۲) در دو ساعت اول ۳) در ساعت دوم ۴) در دو ساعت دوم

۷. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۵-x}{۲x+۱}(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\frac{-۱}{۲}\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۵\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{۵}{۲}\}$

۸. مهم تابع $f(x)=\frac{۱}{۳x^۲-mx+۱۲}$ به ازای چه مقادیری از m همواره تعریف شده است؟

۱) $|m|<۶$ ۲) $|m|<۱۲$ ۳) $|m|<۳$ ۴) $|m|<۱۶$

۹. دشوار اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲-۳x+a}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۰. برد تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ برابر با کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-(-۲,۲)$ ۴) $[-۲,۲]$

۱۱. مهم برد تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

۱۲. مهم اگر نمودار تابع $y=\frac{۲}{x}$ را به اندازهٔ ۲ واحد به بالا و ۳ واحد به راست انتقال دهیم، ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=\frac{x-۴}{۲x-۳}$ ۲) $y=\frac{۲x-۴}{x-۳}$ ۳) $y=\frac{x+۴}{۲x-۳}$ ۴) $y=\frac{۲x+۴}{x+۳}$

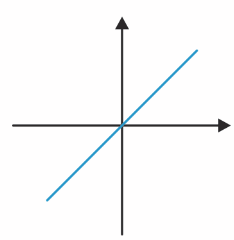
۱۳. مهم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را ۴ واحد به بالا و ۳ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محورها را در کدام نقاط قطع می‌کند؟

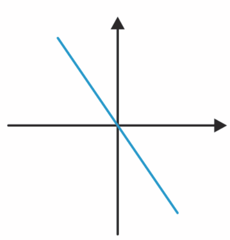
۱) $(\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,\frac{۱۳}{۳})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,-\frac{۱۳}{۳})$ ۳) $(-\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,\frac{۱۳}{۳})$ ۴) $(-\frac{۱۳}{۴},۰),(۰,-\frac{۱۳}{۳})$

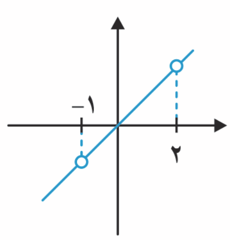
۱۴. مهم فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{۳x-۵}{x-۲}$. کدام گزینه در مورد نمودار g درست است؟

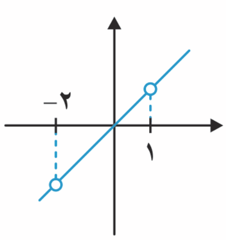
۱) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا است.
۲) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا است.
۳) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین است.
۴) انتقال یافتهٔ نمودار f به اندازهٔ ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین است.

۱۵. نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۳-x^۲-۲x}{x^۲-x-۲}$ شبیه کدام است؟

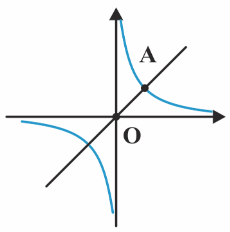
۱)


۲)


۳)


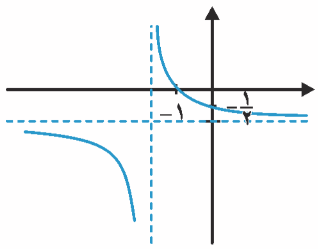
۴)


۱۶. نمودارهای $y=\frac{k}{x}$ و $y=x$ همدیگر را در نقطهٔ A قطع کرده‌اند. اگر $OA=2\sqrt{2}$، آن‌گاه k کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۷. دشوار نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را به اندازهٔ a واحد به پائین و b واحد به چپ منتقل کرده‌ایم. حاصل ab کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) -1
۴) -2

تساوی دو تابع

شرط این که دو تابع f و g با هم مساوی باشند این است که:

اولاً دامنه دو تابع برابر باشند. $(D_f=D_g)$

ثانیاً برای هر $x\in D_f=D_g$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$. یعنی روی دامنهٔ یکسان، ضابطهٔ دو تابع نیز با هم برابر باشند.

مثلاً دو تابع $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$ با هم مساویند. زیرا:

اولاً:

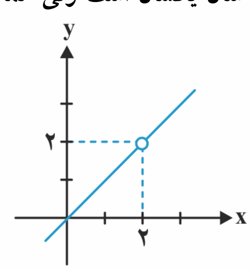
$$\left.\begin{array}{l} D_f=\mathbb{R} \\ D_g=\mathbb{R}\to (\text{مخرج فاقد ریشه است}) \end{array}\right\}\Rightarrow D_f=D_g$$

ثانیاً:

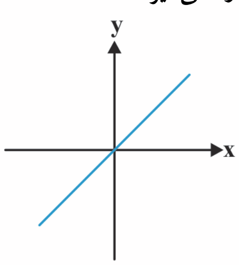
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-1 \\ g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}=\dfrac{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}=x^2-1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

مفهوم تساوی دو تابع از روی نمودارشان

اگر دو تابع با هم مساوی باشند باید نمودارشان دقیقاً روی هم قرار گیرند. مثلاً دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}$ با وجود این که ضابطه‌شان یکسان است ولی همان‌طور که در شکل‌های زیر می‌بینیم نمودارشان دقیقاً روی هم قرار نمی‌گیرد.



$$g(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=x$$



$f(x)=x$

در نمودار تابع g یک نقطهٔ توخالی به ازای $x=2$ داریم. چون دامنه این تابع $\mathbb{R}-\{2\}$ است.

پس در واقع این دو تابع با هم مساوی نیستند.

مثال در هر حالت تعیین کنید آیا توابع f و g مساویند یا خیر؟

ب) $f(x)=x^2-2x+4\ ,\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{x+2} & ; \quad x\neq -2\\ 12 & ; \quad x=-2\end{cases}$

الف) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}\ ,\ g(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

پاسخ **الف** ابتدا دامنهٔ هر یک از توابع را به دست می‌آوریم:

$D_f : x-3=0 \to x=3 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$D_g : x^2-5x+6=0 \to (x-3)(x-2)=0 \Rightarrow x=3\ ,\ x=2 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{2,3\}$

چون $D_f \neq D_g$ است، پس دو تابع مساوی نیستند. در این‌جا دیگر نیازی نیست بررسی کنیم که آیا ضابطهٔ دو تابع برابر است یا خیر.

ب ابتدا دامنهٔ ۲ تابع را به دست می‌آوریم:

$D_f=\mathbb{R} \to$ دامنه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است

$D_g=\mathbb{R} \to$

چون در این تابع دو ضابطه‌ای، در ضابطهٔ اول یک عبارت گویا داریم که ریشهٔ مخرج آن $x=-2$ است ولی می‌بینیم که این ضابطه برای $x \neq -2$ است. یعنی در واقع هیچ‌گاه $x=-2$ نمی‌تواند باشد.

چون دامنهٔ دو تابع مساوی است، شرط دوم تساوی دو تابع را بررسی می‌کنیم.

اگر $x \neq -2 \Rightarrow g(x)=\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}}=x^2-2x+4=f(x)$

اگر $x=-2 \Rightarrow g(-2)=12=f(-2)$

پس دو تابع f و g با هم مساویند.

مثال اگر توابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x+3}{x-1} & ; \ x \neq 1 \\ a-1 & ; \ x=1\end{cases}$ و $g(x)=x-3$ با هم مساوی باشند، آن‌گاه مقدار a را بیابید.

پاسخ با توجه به این که $\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=x-3$ داریم: $f(x)=\begin{cases}x-3 & x \neq 1 \\ a-1 & x=1\end{cases}$

همان‌طور که می‌بینیم برای $x \neq 1$ ضابطهٔ دو تابع f و g با هم برابرند، پس برای این که دو تابع با هم مساوی باشند باید در نقطهٔ $x=1$ نیز مقدارهایشان یکسان شوند، یعنی باید $f(1)=g(1)$.

$f(1)=a-1,\ g(1)=1-3=-2 \Rightarrow a-1=-2 \Rightarrow a=-1$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۸. دو تابع $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ و $g(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$ با هم مساوی‌اند. حاصل ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹. اگر دو تابع $f=\{(1,4),(a,5),(6,2)\}$ و $g=\{(3,b),(a+3,c),(d,e)\}$ با هم برابر باشند، حاصل $a+b+c+d+e$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۰. **مهم** به توابع زیر توجه کنید:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1},\quad g(x)=x+1 \qquad p(x)=\frac{x^3+x^2+x}{x^2+x+1},\quad q(x)=x$$

کدام درست است؟

۱) $f(x)=g(x)$ ۲) $p(x)=q(x)$ ۳) $f(x)=g(x)$ و $p(x)=q(x)$ ۴) هیچ‌کدام درست نیست.

۲۱. **مهم** دو تابع $f(x)=\frac{3}{x-2}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ با هم برابر هستند. حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۲۲. دو تابع $f(x)=x-3$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-6}{x+2} & x \neq -2 \\ a & x=-2\end{cases}$ با هم برابر هستند. مقدار a کدام است؟

۱) -5 ۲) -6 ۳) -7 ۴) -8

۲۳. **مهم** در کدام گزینه تساوی دو تابع برقرار نیست؟

۱) $g(x)=\frac{x}{x^2}\ ,\ f(x)=\frac{1}{x}$

۲) $g(x)=\sqrt{x^2-2x+1}\ ,\ f(x)=|x-1|$

۳) $g(x)=|x+\frac{1}{x}|\ ,\ f(x)=|x|+\frac{1}{|x|}$

۴) $g(x)=|x|-|\frac{1}{x}|\ ,\ f(x)=|x-\frac{1}{x}|$

۲۴. تابع $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x-3|}{x-3}$ با کدام تابع برابر است؟

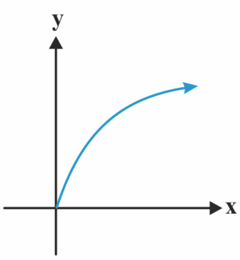
۱) $g(x)=\begin{cases}2x-1 & x>3\\ 2 & 1<x<3\\ 1-2x & x<1\end{cases}$
۲) $g(x)=\begin{cases}2 & x>3\\ 0 & 1<x<3\\ -2 & x<1\end{cases}$
۳) $g(x)=\begin{cases}1-2x & x>3\\ -2 & 1<x<3\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$
۴) $g(x)=\begin{cases}-2 & x>3\\ 0 & 1<x<3\\ 2 & x<1\end{cases}$

۲۵. دشوار اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+b}{x+2} & x\neq a\\ c & x=a\end{cases}$ و $g(x)=dx+e$ برابر باشند $(d\neq 0)$، حاصل $a+b+c+d+e$ کدام است؟

۱) 1
۲) -1
۳) 3
۴) -3

توابع رادیکالی

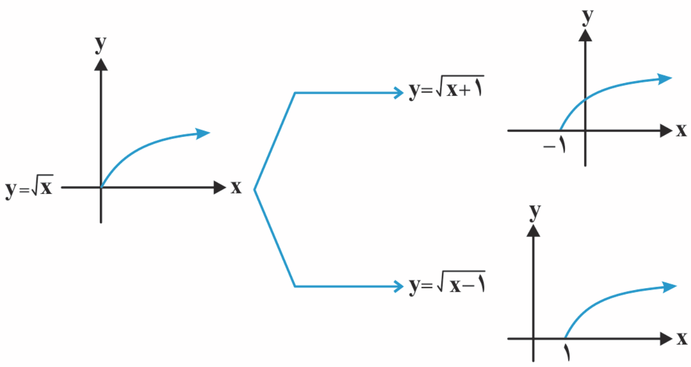
تابع $f(x)=\sqrt{x}$



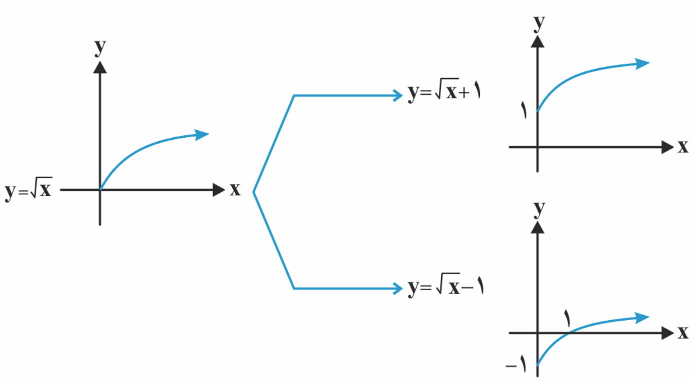
ساده‌ترین تابع رادیکالی است که نمودارش به صورت مقابل است.
دامنه و برد این تابع اعداد حقیقی نامنفی است.

رسم نمودار توابع رادیکالی به کمک انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$

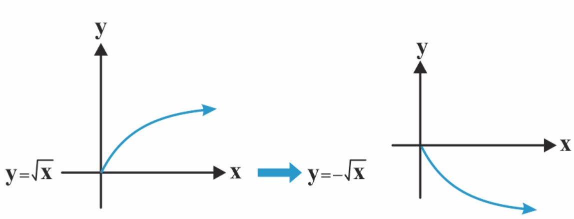
- برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{x+a}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها به اندازه a واحد به راست و یا چپ انتقال دهیم.
اگر $a>0$ باشد، نمودار را به چپ و اگر $a<0$ باشد، نمودار را به راست انتقال می‌دهیم. مانند:



- برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{x}+a$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را در امتداد محور yها به اندازه a واحد به بالا و یا پایین انتقال دهیم. اگر $a>0$ باشد، نمودار را به بالا و اگر $a<0$ باشد، نمودار را به پایین انتقال می‌دهیم. مانند:



- برای رسم نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم. به صورت مقابل:



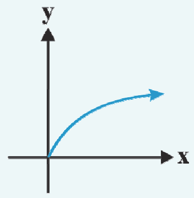
مثال نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

ب $g(x)=-۳+\sqrt{x-۱}$

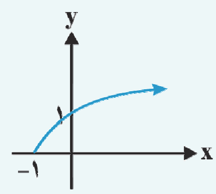
الف $f(x)=۲-\sqrt{x+۱}$

پاسخ **الف**

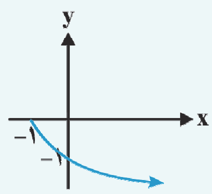
$y=\sqrt{x}$



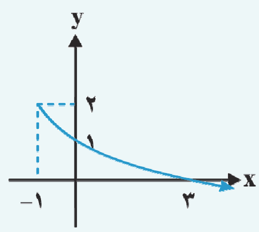
نمودار را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم $\longrightarrow$ $y=\sqrt{x+۱}$



نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم $\longrightarrow$ $y=-\sqrt{x+۱}$

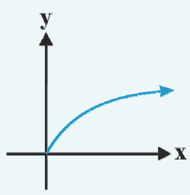


نمودار را ۲ واحد در امتداد محور y ها بالا می‌بریم $\longrightarrow$ $y=۲-\sqrt{x+۱}$

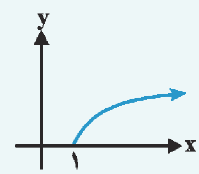


ب

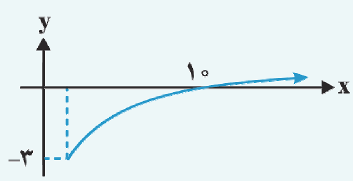
$y=\sqrt{x}$



نمودار را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم $\longrightarrow$ $y=\sqrt{x-۱}$



نمودار را ۳ واحد در امتداد محور y ها پایین می‌آوریم $\longrightarrow$ $y=-۳+\sqrt{x-۱}$



دامنه توابع رادیکالی

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی دو حالت در نظر می‌گیریم:

- اگر فرجه رادیکال فرد باشد، بدون در نظر گرفتن رادیکال دامنه تابع زیر رادیکال را به دست می‌آوریم.
- اگر فرجه رادیکال زوج باشد، باید اولاً دامنه تابع زیر رادیکال را تعیین کنیم و ثانیاً باید تابع زیر رادیکال را بزرگ‌تر و یا مساوی صفر قرار دهیم و سپس بین مقادیر به دست آمده برای x از اولاً و ثانیاً اشتراک بگیریم.

مثال دامنه هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف $y=\sqrt[۳]{\dfrac{x+۴}{x^۲-۲x}}$

ب $y=\sqrt{\dfrac{x^۲-x}{x-۲}}$

ج $y=\sqrt{۴-\sqrt{x+۱}}$

د $y=\sqrt{\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}}$

پاسخ **الف** چون فرجه رادیکال فرد است پس فقط کافی است دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست آوریم:

$x^۲-۲x=۰ \to x(x-۲)=۰ \to x=۰\ ,\ x=۲ \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

ب چون فرجه رادیکال زوج است پس باید علاوه بر این که دامنه عبارت زیر رادیکال را می‌یابیم، عبارت $\frac{x^۲-x}{x-۲}\geq ۰$ باشد. یعنی:

$x-۲\neq ۰ \to x\neq ۲$ **۱**

$P=\frac{x^۲-x}{x-۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{x(x-۱)}{x-۲}\geq ۰$

x		۰		۱		۲	
P	−	۰	+	۰	−	ت	+

$\Rightarrow x\in[۰,۱]\cup(۲,+\infty)$ **۲**

از اشتراک **۱** و **۲** دامنه تابع برابر است با: $D_y=[۰,۱]\cup(۲,+\infty)$

ج در این تابع چون دو رادیکال با فرجه زوج داریم، پس:

اولاً $x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱$ **۱**

ثانیاً $۴-\sqrt{x+۱}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x+۱}\leq ۴ \Rightarrow x+۱\leq ۱۶ \Rightarrow x\leq ۱۵$ **۲**

از اشتراک **۱** و **۲** دامنه تابع برابر است با: $D_y=[-۱,۱۵]$

د برای تعیین دامنه در این تابع سه شرط به صورت زیر داریم:

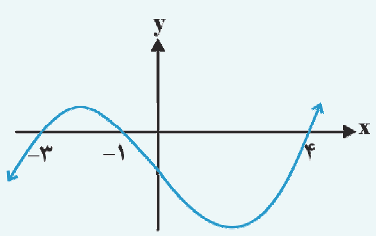
اولاً $x\geq ۰$ **۱**

ثانیاً $۱+\sqrt{x}\neq ۰ \Rightarrow \sqrt{x}\neq -۱ \to$ همواره برقرار است $\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ **۲**

ثالثاً $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\geq ۰ \xrightarrow{۱+\sqrt{x}>۰} ۱-\sqrt{x}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x}\leq ۱ \Rightarrow x\leq ۱$ **۳**

از اشتراک **۱**، **۲** و **۳** دامنه تابع برابر است با: $D_y=[۰,۱]$

مثال شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ را بیابید.



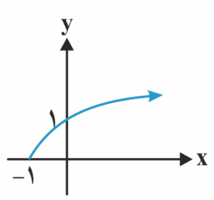
پاسخ با توجه به نمودار داده شده می‌توان گفت دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس دامنه تابع $g(x)$ مقادیری از x است کـه $xf(x)\geq ۰$ می‌شود. برای برقراری این نامساوی باید x و $f(x)$ هم علامت باشند، یعنی:

$$\left\{\begin{array}{l} x\geq ۰ \Rightarrow f(x)\geq ۰ \Rightarrow x\in[۴,+\infty) \\ \text{یا} \\ x\leq ۰ \Rightarrow f(x)\leq ۰ \Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup[-۱,۰] \end{array}\right. \xrightarrow{\text{اجتماع}} D_g=(-\infty,-۳]\cup[-۱,۰]\cup[۴,+\infty)$$

برد توابع رادیکالی

می‌دانیم برد تابع در واقع تصویر قائم نمودار تابع روی محور yها است. مثلاً برد تابع $y=\sqrt{x+۱}$ با توجه به نمودارش که به صورت می‌باشد، برابر اعداد حقیقی نامنفی است، یعنی:

برد $\mathbb{R}=[۰,+\infty)$



در توابع رادیکالی به راحتی می‌توانیم با توجه به محدوده دامنه تابع، حدودی برای y که همان برد تابع است، بیابیم. مثلاً برابر تعیین برد تابع $y=۳+\sqrt{x-۲}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x-۲\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۲}\geq ۰ \Rightarrow ۳+\sqrt{x-۲}\geq ۳ \Rightarrow \overset{\text{برد}}{\mathbb{R}}=[۳,+\infty)$$

مثال در تابع $f(x)=a-\sqrt{x+b}$ اگر دامنه تابع بازه $[۴,+\infty)$ و برد آن بازه $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ باشد، $a+b$ کدام است؟

پاسخ چون دامنه $[۴,+\infty)$ است، پس: $x\ge ۴$. در واقع

$$x+b\ge ۰\to x\ge -b \xrightarrow[x\ge ۴]{\text{چون}} -b=۴\Rightarrow b=-۴\Rightarrow y=a-\sqrt{x-۴}$$

با توجه به تابع فوق داریم:

$$x-۴\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x-۴}\ge ۰\Rightarrow -\sqrt{x-۴}\le ۰\Rightarrow a-\sqrt{x-۴}\le a\Rightarrow y\le a$$

چون برد بازه $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ است، یعنی $y\le -\frac{۱}{۲}$، پس $a=-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد و داریم: $a+b=-\frac{۱}{۲}-۴=-\frac{۹}{۲}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۶. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳۵-x^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۷

۲۷. دامنهٔ $f(x)=\sqrt{(۴-x^۲)(x^۲-x+۱)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۸. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{-x^۲(x^۲-۴)^۲}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۹. دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}-\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}+\sqrt{۱-۲x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ ۲) $(-\infty,-۱)$ ۳) $R-[-۱,۱]$ ۴) $R-(-۱,۱)$

۳۰. **مهم** اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنهٔ تابع $f(۳-x)$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۲)*

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۳۱. **مهم** دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۲-\sqrt{x-۱}}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۵,+\infty)$ ۳) $[۱,۵]$ ۴) $[-۵,۵]$

۳۲. اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}$، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟ *(سراسری خارج از کشور تجربی ۹۲)*

۱) $x\le -۱$ ۲) $x\ge -۱$ ۳) $x\le ۱$ ۴) $x\ge ۱$

۳۳. **دشوار** دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-|x|-۲}$ کدام گزینه است؟

۱) $x\ge ۲\ ,x\le -۲$ ۲) $-۱<x<۱$ ۳) $-۲<x<۲$ ۴) R

۳۴. **دشوار** دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ کدام است؟

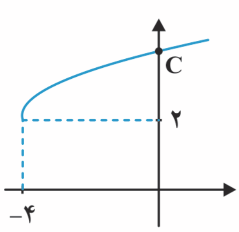
۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[۰,\sqrt{۲})$ ۴) $\{۰\}\cup[۱,+\infty)$

۳۵. تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ مفروض است. اگر دامنهٔ آن $[-۴,+\infty)$ و برد آن $[-۳,+\infty)$ باشد، آن‌گاه این نمودار محور xها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

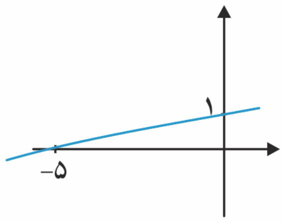
۱) $(۵,۰)$ ۲) $(۶,۰)$ ۳) $(۷,۰)$ ۴) $(۸,۰)$

۳۶. **مهم** نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به شکل روبه‌رو است. مقدار C کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

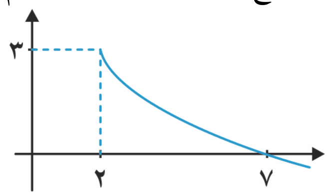


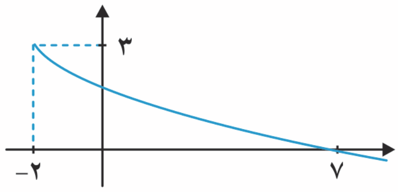
۳۷. نمودار تابع $y=a+\sqrt{x+b}$ به شکل روبه‌رو است. حاصل ab کدام است؟

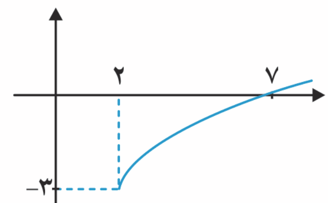


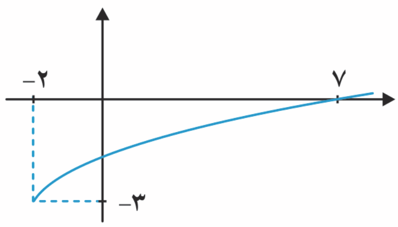
۱) ۱۸
۲) ۱۸-
۳) ۱۶
۴) ۱۶-

۳۸. نمودار تابع $y=3-\sqrt{x+2}$ شبیه کدام گزینه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۳۹. برد تابع f به معادلهٔ $y=\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $(0,+\infty)$
۳) $[0,1]$
۴) $[-1,1]$

۴۰. برد تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$
۲) $[\sqrt{2},+\infty)$
۳) $[\sqrt{3},+\infty)$
۴) $[\sqrt{5},+\infty)$

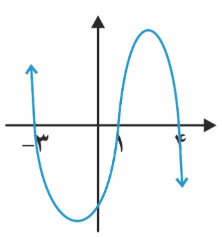
۴۱. **مهم** به توابع مقابل توجه کنید:

$q(x)=\sqrt{x^3+x}$, $p(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$

کدام درست است؟

۱) $f(x)=g(x)$
۲) $p(x)=q(x)$
۳) $p(x)=q(x)$, $f(x)=g(x)$
۴) هیچ‌کدام

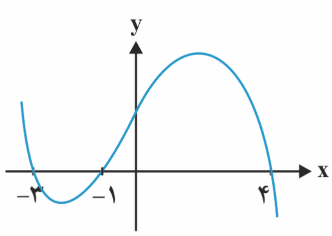
۴۲. شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $(-\infty,-3]\cup[1,4]$
۲) $[-3,1]\cup[4,+\infty)$
۳) $[-3,0]\cup[1,4]$
۴) $(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$

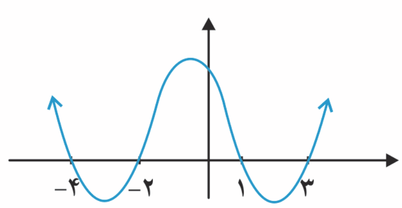
۴۳. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(سراسری خارج از کشور تجربی ۹۴)



۱) $[-1,1]\cup[0,6]$
۲) $[-3,1]\cup[0,2]$
۳) $[-5,-3]\cup[-1,2]$
۴) $[-5,-3]\cup[0,2]$

۴۴. **دشوار** شکل مقابل نمودار $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)f(x)}}$ کدام است؟

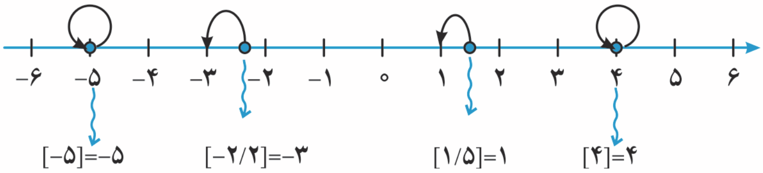


۱) $(-\infty,-4)\cup[-2,-1]\cup[1,3]$
۲) $(-\infty,-4)\cup(-2,-1)\cup(1,3)$
۳) $[-4,-2]\cup[-1,1]\cup[3,+\infty)$
۴) $(-4,-2)\cup(-1,1)\cup(3,+\infty)$

تابع جزء صحیح

تعریف جزء صحیح

اگر x عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x یا براکت x که با نماد [x] نشان می‌دهیم، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که کوچک‌تر یا مساوی x است. به عنوان مثال داریم:



تذکر اگر برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح n وجود داشته باشد، به طوری که $n\le x<n+1$ آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $[x]=n$.

مثلاً: $-6\le \frac{-35}{6}<-5 \Rightarrow [\frac{-35}{6}]=-6$ $\qquad$ $3\le\sqrt{11}<4\Rightarrow[\sqrt{11}]=3$

مثال حاصل $[-5x]$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

پاسخ

$$[-5(\sqrt{2})] \xrightarrow{\sqrt{2}\simeq 1/41} [-5(1/41)]=[-7/05]=-8$$

مثال اگر $x^2+x<0$ باشد، حاصل عبارت $[x]+[x^2]+[x^{+3}]$ را بیابید.

پاسخ ابتدا حدود x را از نامساوی $x^2+x<0$ بدست می‌آوریم:

$$x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow$$

x		-۱		۰	
x(x+1)	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow -1<x<0$$

$$-1<x<0\Rightarrow\begin{cases}[x]=-1\\ 0<x^2<1\Rightarrow[x^2]=0\\ -1<x^3<0\Rightarrow[x^3]=-1\end{cases}\Rightarrow[x]+[x^2]+[x^3]=-1+0-1=-2$$

مثال اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل عبارت $P=[\sqrt{n^2}]+[\sqrt{n^2+1}]+\dots+[\sqrt{n^2+n}]$ به‌دست آورید.

پاسخ با توجه به اینکه $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$[\sqrt{n^2}]=[n]=n$$
$$n^2<n^2+1<(n+1)^2\Rightarrow n<\sqrt{n^2+1}<n+1\Rightarrow[\sqrt{n^2+1}]=n$$
$$n^2<n^2+2<(n+1)^2\Rightarrow n<\sqrt{n^2+2}<n+1\Rightarrow[\sqrt{n^2+2}]=n$$
$$\vdots$$
$$n^2<n^2+n<(n+1)^2\Rightarrow n<\sqrt{n^2+n}<n+1\Rightarrow[\sqrt{n^2+n}]=n$$

چون تعداد براکت‌ها در صورت سؤال برابر $(n+1)$ تا می‌باشد و دیدیم که حاصل هر براکت برابر n شد. پس مجموع داده شده برابر است با:

$$P=(n+1)n=n^2+n$$

ویژگی‌های تابع جزء صحیح

۱ $[x]\le x\Rightarrow\begin{cases}\text{اگر } x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]=x\\ \text{اگر } x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[x]<x\end{cases}$

۲ $[x]\le x<[x]+1\Rightarrow 0\le x-[x]<1$

توجه برای هر عدد حقیقی x می‌توان گفت $x=[x]+\alpha$، که α جزء اعشاری x (جزء کسری x) نامیده می‌شود و با توجه به خاصیت فوق همواره $0\le\alpha<1$.

نکته با توجه به خاصیت ۲ می‌توان گفت در حالت کلی $0\le U-[U]<1$ است.

۳ $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ; \quad x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ; \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

مثال $[5]+[-5]=5-5=0$

مثال $[2/4]+[-2/4]=2+(-3)=-1$

۴ $[x\pm k]=[x]\pm k\,;k\in\mathbb{Z}$

$[k\pm x]=k+[\pm x]\,;\,k\in\mathbb{Z}$

مثال $[3-x]=3+[-x]$

مثال $[x-3]=[x]-3$

۵ $[-x]=\begin{cases}-[x] & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

مثال $[-3/4]=-[3/4]-1=-3-1=-4$

مثال $[-7]=-[7]=-7$

۶ $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\,;\,0\le\alpha+\beta<1\\ [x]+[y]+1\,;\,1\le\alpha+\beta<2\end{cases}$ (α جزاعشاری x و β جزء اعشاری y است)

۷ $[2x]=\begin{cases}2[x] & ;\ 0\le\alpha<\frac{1}{2}\\ 2[x]+1 & ;\ \frac{1}{2}\le\alpha<1\end{cases}$ (α جزء اعشاری x است)

۸ $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$

مثال اگر $y=x-3[\frac{x}{3}]$ در این صورت حدود y کدام است؟

پاسخ

$$y=x-3[\frac{x}{3}]=3(\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}])$$

با توجه به نکته ویژگی (۲) داریم:

$$0\le\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}]<1\Rightarrow 0\le 3(\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}])<3\Rightarrow 0\le y<3$$

معادلات شامل جزء صحیح

در حالت کلی برای معادله $[f(x)]=n$ داریم: اگر $n\notin\mathbb{Z}\Rightarrow$ معادله جواب ندارد و اگر $n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\le f(x)<n+1$

مثال مجموعه جواب معادلات زیر را بدست آورید.

الف) $[3x]=\frac{1}{4}$ **ب)** $[x]+[x+2]=8$ **ج)** $x+[2x]+[4x]=15$

پاسخ

الف) چون $\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$ پس معادله جواب ندارد $\Leftarrow [3x]=\frac{1}{4}$

ب)

$$[x]+[x+2]=8\Rightarrow[x]+[x]+2=8\Rightarrow 2[x]=6$$

$$\Rightarrow[x]=3\Rightarrow 3\le x<4$$

ج)

$$x+[2x]+[4x]=15\Rightarrow x=\underbrace{15}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{[2x]}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{[4x]}_{\in\mathbb{Z}}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

با فرض $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+2x+4x=15\Rightarrow 7x=15\Rightarrow x=\frac{15}{7}\notin\mathbb{Z}$ غ ق ق

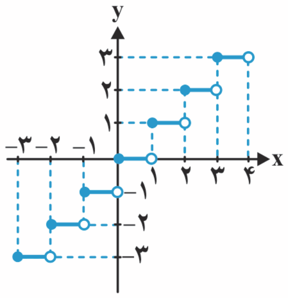
پس این معادله جواب ندارد.

تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح که به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود، تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد.

دامنه این تابع $\mathbb{R}$، و برد آن مجموعه $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح) است.

با توجه به تعریف جزء صحیح برای $x\in[n,n+1)$ ؛ $(n\in\mathbb{Z})$ داریم $f(x)=n$ بنابراین نمودار تابع جزء صحیح در بازه $[-3,4)$ به صورت مقابل است.



مثال نمودار تابع $y=-[x]+۱$ را در بازه $[-۲,۱]$ رسم کنید.

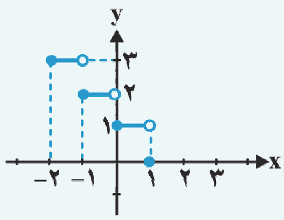
پاسخ می‌توانیم با محدوده بندی نمودار را به صورت زیر رسم کنیم:

$-۲\le x<-۱\Rightarrow[x]=-۲\Rightarrow y=-(-۲)+۱=۳$

$-۱\le x<۰\Rightarrow[x]=-۱\Rightarrow y=-(-۱)+۱=۲$

$۰\le x<۱\Rightarrow[x]=۰\Rightarrow y=۰+۱=۱$

$x=۱\Rightarrow[x]=۱\Rightarrow y=-۱+۱=۰\rightarrow$ نقطه به مختصات $(۱,۰)$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۵. اگر $f(x)=|[۵x]|-[|۳x|]$ مقدار $f(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟ *(سنجش ریاضی ۹۰)*

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۴۶. حاصل $[(۱-\sqrt{۳})^{۲۰}]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲۰

۴۷. **مهم** دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{[x]-۱}}$ کدام است؟ *(پیش‌دانشگاهی تجربی ۷۵)*

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $(۲,+\infty)$ ۴) $(۱,+\infty)$

۴۸. اگر $\frac{x-۱}{۴-x}>۰$ باشد، حاصل $[\sqrt{x}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۹. اگر $[\frac{x}{۲}]=۱$ باشد، حاصل $\sqrt{x^۲-۴x+۴}+\sqrt{x^۲-۸x+۱۶}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۵۰. **دشوار** دامنهٔ توابع $f(x)=\frac{۱}{-[\frac{x^۲}{۴}]}$ و $g(x)=\frac{۱}{[\frac{x^۲-۴}{۵}]}$ به ترتیب کدام است؟

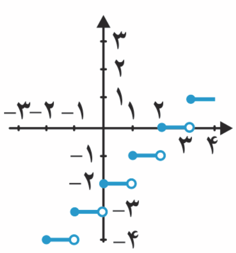
۱) $D_f=(-۲,۲)$ ، $D_g=(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

۲) $D_f=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ ، $D_g=(-\infty,-۳]\cup(-۲,۲)\cup[۳,+\infty)$

۳) $D_f=(-۲,۲)$ ، $D_g=(-\infty,-۳]\cup(-۲,۲)\cup[۳,+\infty)$

۴) $D_f=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ ، $D_g=(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

۵۱. **مهم** اگر نمودار $f(x)=[x-۳]+a$ به شکل زیر باشد، مقدار a کدام است؟



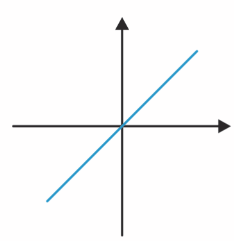
۱) ۱

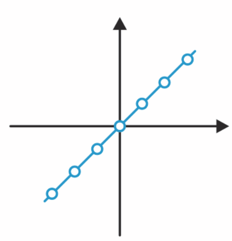
۲) -۱

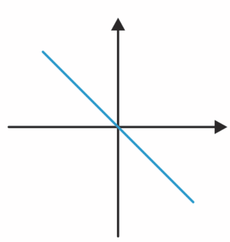
۳) ۳

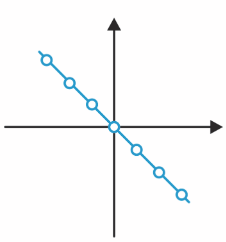
۴) -۳

۵۲. نمودار $f(x)=\frac{-x}{[x]+[-x]}$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

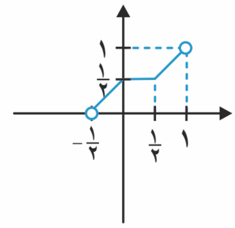
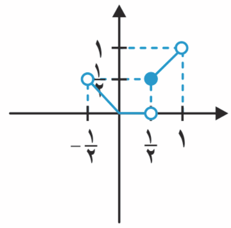
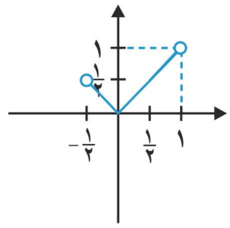
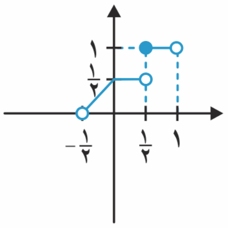
۳) 

۴) 

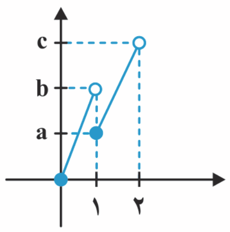
۵۳. نمودار تابع $y=[x^2]$ روی بازهٔ $x\in(-2,2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۱)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۴. مهم نمودار تابع $f(x)=x[2x]$ در بازهٔ $(-\frac{1}{2},1)$ کدام است؟

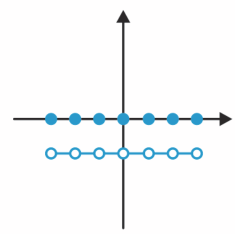
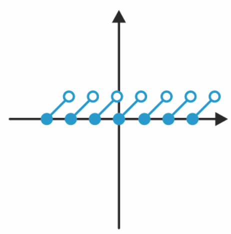
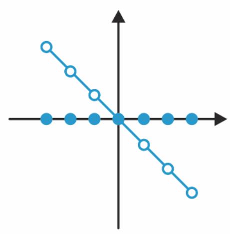
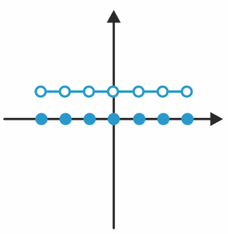
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۵۵. نمودار $f(x)=x(3-[x])$ به شکل روبه‌رو است. حاصل $\frac{a+c}{b}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۶. مهم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x([x]+[-x])$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۵۷. برد تابع با ضابطه $f(x)=[x+2]+[-x]$ کدام است؟ (سنجش تجربی ـ ۹۴)

۱) $[1,2]$ ۲) $\{1,2\}$ ۳) $(1,2]$ ۴) $\{2\}$

۵۸. مهم جواب‌های معادله $[3x-2]=-4$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است.) (سنجش تجربی ۹۳)

۱) $[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ ۲) $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}]$ ۳) $(-1,-\frac{2}{3}]$ ۴) $[-1,-\frac{2}{3})$

۵۹. مجموعه جواب معادلهٔ $2[x]+[1-x]=2$ کدام است؟

۱) $(2,3)$ ۲) $(2,4)-\{1\}$ ۳) $(2,4)$ ۴) $(2,3)\cup\{1\}$

۶۰. جواب معادله $2x+[x]=1$ در کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۶۱. مهم جواب معادلهٔ $[3x]=3[x]$ کدام است؟

۱) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x<K+\frac{1}{3}\}$
۲) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x\le K+\frac{1}{3}\}$
۳) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x<K+\frac{2}{3}\}$
۴) $\{x\mid x\in\mathbb{R},K\in\mathbb{Z},K\le x\le K+\frac{2}{3}\}$

۶۲. مهم اگر $[x]=[x+\frac{1}{2}]$، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $[x]=[x-\frac{1}{2}]$ ۲) $2[x]=[2x]$ ۳) $[x]=[x-1]$ ۴) $2[x]=[2x]+1$

۶۳. تابع $f(x)=x+[x]$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a تساوی $f(a)=\frac{7}{3}$ برقرار است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ نامه

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع

توابع گویا

۱. گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=-۱\Rightarrow \dfrac{۲}{x+۲}=-۱\Rightarrow & x=-۴\\ f(x)=۱\Rightarrow \dfrac{۲}{x+۲}=۱\Rightarrow & x=۰\\ f(x)=۲\Rightarrow \dfrac{۲}{x+۲}=۲\Rightarrow & x=-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow D_f=\{-۴,-۱,۰\}$$

۲. گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{x^۲-۳}\Rightarrow f(۲-\sqrt{۳})=\frac{۲(۲-\sqrt{۳})^۲+۲}{(۲-\sqrt{۳})^۲-۳}=\frac{۱۶-۸\sqrt{۳}}{۴-۴\sqrt{۳}}=$$
$$\frac{۴(۴-۲\sqrt{۳})}{۴(۱-\sqrt{۳})}=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{(۴-۲\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}{(۱-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۳})}=$$
$$\frac{-۲+۲\sqrt{۳}}{-۲}=۱-\sqrt{۳}$$

۳. گزینه ۱ از اتحاد تفاضل مکعب‌ها (چاق و لاغر) استفاده می‌کنیم:

$$x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$$
$$f(x)=\frac{x^۳-۸}{x^۲+۲x+۴}=\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{x^۲+۲x+۴}=x-۲$$

با توجه به این که اعداد ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ در دامنهٔ تابع هستند، داریم:

$$f(-۲)+f(-۱)+f(۰)+f(۱)+f(۲)=$$
$$-۴+(-۳)+(-۲)+(-۱)+۰=-۱۰$$

۴. گزینه ۲

$$f(a)=\frac{a-۱}{a+۱},\ f(b)=\frac{b-۱}{b+۱}$$
$$f(a)+f(b)=۰\Rightarrow \frac{a-۱}{a+۱}+\frac{b-۱}{b+۱}=۰\Rightarrow$$
$$\frac{(a-۱)(b+۱)+(a+۱)(b-۱)}{(a+۱)(b+۱)}=۰$$
$$\frac{ab-b+a-۱+ab-a+b-۱}{(a+۱)(b+۱)}=۰\Rightarrow \frac{۲ab-۲}{(a+۱)(b+۱)}=۰$$
$$\Rightarrow ۲ab-۲=۰\Rightarrow ab=۱$$

۵. گزینه ۱

$$p(x)=۳۰۰\Rightarrow \frac{۷۰۰x}{۱۰۰-x}=۳۰۰\Rightarrow ۷۰۰x=۳۰۰۰۰-۳۰۰x$$
$$\Rightarrow x=۳۰$$

۶. گزینه ۳

$$f(x)>۰/۰۸\Rightarrow \frac{۰/۲۴t}{t^۲+۲}>۰/۰۸\xrightarrow{\div ۰/۰۸}$$
$$\frac{۳t}{t^۲+۲}>۱\Rightarrow \frac{۳t}{t^۲+۲}-۱>۰\Rightarrow \frac{-t^۲+۳t-۲}{t^۲+۲}>۰\xrightarrow{t^۲+۲>۰}$$
$$-t^۲+۳t-۲>۰\Rightarrow -(t-۱)(t-۲)>۰\Rightarrow$$

t		۱		۲	
$-(t-۱)(t-۲)$	−	۰	+	۰	−

پس پاسخ $۱<t<۲$ است که همان ساعت دوم است.

۷. گزینه ۲ مخرج نباید ۰ شود:

$$۲x+۱\neq ۰\Rightarrow x\neq -\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

۸. گزینه ۲ حاصل مخرج نباید ۰ شود، پس عبارت $۳x^۲-mx+۱۲$ نباید ۰ شود، چون عبارت درجهٔ ۲ است، مقدار Δ باید منفی باشد:

$$۳x^۲-mx+۱۲\xrightarrow{\Delta<۰}(-m)^۲-۴\times ۳\times ۱۲<۰\Rightarrow$$
$$m^۲-۱۲^۲<۰\Rightarrow (m-۱۲)(m+۱۲)<۰$$

m		−۱۲		۱۲	
$m^۲-۱۲$	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow -۱۲<m<۱۲\Rightarrow |m|<۱۲$$

۹. گزینه ۲ حاصل مخرج به ازای فقط یک مقدار ۰ شده است، پس $x^۲-۳x+a$ دقیقاً یک ریشه دارد، پس $\Delta=۰$.

$$x^۲-۳x+a=۰\xrightarrow{\Delta=۰}(-۳)^۲-۴a=۰\Rightarrow a=\frac{۹}{۴}$$

پس مخرج $x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}$ است و ریشه‌اش (که همان b است) را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}=۰\Rightarrow (x-\frac{۳}{۲})^۲=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

پس:
$$a-b=\frac{۹}{۴}-\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

۱۰. گزینه ۳ می‌دانیم $x\neq ۰$، پس:

$$\left.\begin{array}{l} x>۰\to x+\dfrac{۱}{x}\geq ۲\\ x<۰\to x+\dfrac{۱}{x}\leq -۲ \end{array}\right\}\Rightarrow R_f=\mathbb{R}-(-۲,۲)$$

۱۱. گزینه ۳ اگر $t=x-۱$، آن‌گاه داریم:

$$t>۰\to t+\frac{۱}{t}\geq ۲\Rightarrow x-۱+\frac{۱}{x-۱}\geq ۲\Rightarrow x+\frac{۱}{x-۱}\geq ۳$$
$$t<۰\to t+\frac{۱}{t}\leq -۲\Rightarrow x-۱+\frac{۱}{x-۱}\leq -۲\Rightarrow x+\frac{۱}{x-۱}\leq -۱$$

پس برد تابع $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ است.

۱۲. گزینه ۳

$$y=\frac{۲}{x}\xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}}y=\frac{۲}{x-۳}\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}}$$
$$y=\frac{۲}{x-۳}+۲\Rightarrow y=\frac{۲+۲x-۶}{x-۳}\Rightarrow y=\frac{۲x-۴}{x-۳}$$

۱۳. گزینه ۳

$$y=\frac{۱}{x}\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}}y=\frac{۱}{x}+۴$$
$$y=\frac{۱}{x}+۴\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=\frac{۱}{x+۳}+۴$$

تلاقی با محور yها: $y=\frac{۱}{x+۳}+۴\xrightarrow{x=۰}$

$$y=\frac{۱}{۳}+۴=\frac{۱۳}{۳}\to (۰,\frac{۱۳}{۳})$$

$y = \dfrac{۱}{x+۳} + ۴ \xrightarrow{y=۰}$ تلاقی با محور x ها :

$\dfrac{۱}{x+۳} + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -\dfrac{۱۳}{۴} \to (-\dfrac{۱۳}{۴}, ۰)$

۱۴. گزینه۱

$$g(x) = \frac{۳x-۵}{x-۲} = \frac{۳(x-۲)+۱}{x-۲} = ۳ + \frac{۱}{x-۲}$$

$$f(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow f(x-۲) = \frac{۱}{x-۲} \Rightarrow f(x-۲) + ۳ = ۳ + \frac{۱}{x-۲}$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x-۲) + ۳$$

۱۵. گزینه۳

$$f(x) = \frac{x^۳ - x^۲ - ۲x}{x^۲ - x - ۲} = \frac{x(x^۲ - x - ۲)}{x^۲ - x - ۲} = \frac{x(x+۱)(x-۲)}{(x+۱)(x-۲)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ D_f = \mathbb{R} - \{-۱, ۲\} \end{cases}$$

بنابراین نمودار گزینهٔ ۳ درست است.

۱۶. گزینه۳ معادلهٔ $x = \dfrac{K}{x}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x = \frac{K}{x} \Rightarrow x^۲ = K \xrightarrow{x>۰} x = \sqrt{K}$$

$$y = x \xrightarrow{x=\sqrt{K}} y = \sqrt{K}$$

$$\left.\begin{array}{l} O(۰,۰) \\ A(\sqrt{K}, \sqrt{K}) \end{array}\right\} \Rightarrow OA = \sqrt{(\sqrt{K} - ۰)^۲ + (\sqrt{K} - ۰)^۲} = \sqrt{۲K}$$

$$OA = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۲K} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲K = ۸ \Rightarrow K = ۴$$

۱۷. گزینه۳

$$y = \frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{b واحد به چپ}} y = \frac{۱}{x+b} \xrightarrow{\text{a واحد به پایین}}$$

$$y = \frac{۱}{x+b} + a \ ; \ b > ۱ \ , \ a < ۰$$

$$\xrightarrow{(-۱, ۰)} \frac{۱}{b-۱} + a = ۰ \Rightarrow \frac{۱ + ab - a}{b-۱} = ۰ \Rightarrow$$

$$ab + ۱ = a \quad (\text{I})$$

$$\xrightarrow{(۰, -\frac{۱}{۲})} \frac{۱}{b} + a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{ab+۱}{b} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$ab + ۱ = -\frac{b}{۲} \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{\text{I,II}} a = -\frac{b}{۲} \xrightarrow{\text{II}} -\frac{b^۲}{۲} + ۱ = -\frac{b}{۲} \Rightarrow b^۲ - b - ۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$(b-۲)(b+۱) = ۰ \xrightarrow{b>۰} b = ۲$$

$$ab + ۱ = a \xrightarrow{b=۲} ۲a + ۱ = a \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow ab = -۲$$

تساوی دو تابع

۱۸. گزینه۱

$$f(x) = \frac{۲x}{x^۲ - ۴}$$

$$g(x) = \frac{a}{x-۲} + \frac{b}{x+۲} = \frac{a(x+۲) + b(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)} =$$

$$\frac{(a+b)x + ۲a - ۲b}{x^۲ - ۴} \Rightarrow \frac{۲x}{x^۲ - ۴} = \frac{(a+b)x + ۲a - ۲b}{x^۲ - ۴} \Rightarrow$$

$$۲x = (a+b)x + ۲a - ۲b \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۲a - ۲b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = b = ۱ \Rightarrow ab = ۱$$

۱۹. گزینه۲

$$\left.\begin{array}{l} \{۱,۶\} \in D_f \\ \{۳\} \in D_g \end{array}\right\} \Rightarrow D_f = D_g = \{۱,۳,۶\} \xrightarrow{D_f} a = ۳$$

$$\left.\begin{array}{l} (a+۳, c) \xrightarrow{a=۳} (۶, c) \in D_f \\ \qquad\qquad\quad (۶, ۲) \in D_g \end{array}\right\} \Rightarrow c = ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} f = \{(۱,۴), (۳,۵), (۶,۲)\} \\ g = \{(۳,b), (۶,۲), (d,e)\} \end{array}\right\} \Rightarrow b = ۵ \ , \ d = ۱ \ , \ e = ۴$$

$$\Rightarrow a + b + c + d + e = ۳ + ۵ + ۲ + ۱ + ۴ = ۱۵$$

۲۰. گزینه۲ اگر ضابطه و دامنهٔ دو تابع برابر باشند، دو تابع باهم برابر هستند.

$$\left.\begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} - \{-۱\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

در تابع p مخرج نباید ۰ شود.

$$x^۲ + x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \Rightarrow D_p = \mathbb{R} \ , \ D_q = \mathbb{R}$$

دامنهٔ p و q برابر با $\mathbb{R}$ است.

$$p(x) = \frac{x^۳ + x^۲ + x}{x^۲ + x + ۱} = \frac{x(x^۲ + x + ۱)}{x^۲ + x + ۱} = x \Rightarrow p(x) = q(x)$$

۲۱. گزینه۳

$$f(x) = \frac{۳}{x-۲} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۲\}$$

در تابع $g(x) = \dfrac{ax+b}{x^۲ + cx + d}$، مخرج باید تنها بـه ازای $x = ۲$، برابـر با ۰ می‌شود، پس عبارت $x^۲ + cx + d$ ریشهٔ مضاعف $x = ۲$ را دارد:

$$(x-۲)^۲ = x^۲ + cx + d \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = x^۲ + cx + d \Rightarrow$$

$$c = -۴ \ , \ d = ۴$$

حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \dfrac{ax+b}{(x-۲)^۲} \\ f(x) = \dfrac{۳}{x-۲} = \dfrac{۳x-۶}{(x-۲)^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow ax + b = ۳x - ۶ \Rightarrow a = ۳ \ , \ b = -۶$$

پس:

$$a + b + c + d = ۳ - ۶ - ۴ + ۴ = -۳$$

۲۲. گزینه۱

$$f(x) = x - ۳ \Rightarrow f(-۲) = -۵ \Rightarrow g(-۲) = -۵$$

$$g(-۲) = a \Rightarrow a = -۵$$

برابری دو تابع را نشان می‌دهیم:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - x - ۶}{x+۲} & x \neq -۲ \\ -۵ & x = -۲ \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+۲)(x-۳)}{(x+۲)} & x \neq ۲ \\ -۵ & x = -۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x - ۳ & x \neq -۲ \\ -۵ & x = -۲ \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$$

۲۳. گزینه۳ در گزینهٔ ۱ برابر هستند:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \dfrac{x}{x^۲} = \dfrac{۱}{x} \\ f(x) = \dfrac{۱}{x} \end{array}\right\} \xrightarrow{D_f = D_g = \mathbb{R} - \{۰\}} f = g$$

در گزینهٔ ۲ برابر هستند:

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1| \\ f(x)=|x-1| \end{array}\right\}$$

در گزینهٔ ۳ برابر هستند:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x} & x>0 \\ -x-\frac{1}{x} & x<0 \end{cases} \\ g(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x} & x>0 \\ -x-\frac{1}{x} & x<0 \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0\}} f=g$$

در گزینهٔ ۴ برابر نیستند:

$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{1}{2})=|-\frac{1}{2}+2|=\frac{3}{2} \\ g(-\frac{1}{2})=|-\frac{1}{2}|-|-2|=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f\neq g$$

۲۴. گزینهٔ ۲

$$x>3 \Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{x-3}{x-3}=1+1=2$$

$$1<x<3 \Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{3-x}{x-3}=1-1=0$$

$$x<1 \Rightarrow \frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{1-x}{x-1}+\frac{3-x}{x-3}=-1-1=-2$$

۲۵. گزینهٔ ۱ g یک تابع خطی است، پس f هم باید خطی باشد، این تنها در حالتی اتفاق می‌افتد که در عبارت $\frac{x^2+3x+b}{x+2}$ صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد. پس حاصل صورت به ازای $x=-2$ باید ۰ شود.

$$x^2+3x+b \xrightarrow{x=-2} 4-6+b=0 \Rightarrow b=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+2} & x\neq a \\ c & x=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \frac{(x+1)(x+2)}{x+2} & x\neq a \\ c & x=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq -2 \\ c & x=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+1=dx+e \Rightarrow d=e=1 \Rightarrow g(x)=x+1$$

$$f(-2)=g(-2) \Rightarrow c=-2+1 \Rightarrow c=-1$$

$$a+b+c+d+e=-2+2-1+1+1=1$$

توابع رادیکالی

۲۶. گزینهٔ ۳

$$y=\sqrt{35-x^2} \Rightarrow 35-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2-35\leq 0 \Rightarrow$$

$$(x-\sqrt{35})(x+\sqrt{35})\leq 0 \Rightarrow -\sqrt{35}\leq x\leq \sqrt{35}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{35}\simeq 5/9} -5/9\leq x\leq 5/9$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{-5,-4,\ldots,4,5\}$$

مجموعهٔ بالا شامل ۱۱ عضو است.

۲۷. گزینهٔ ۲ در عبارت x^2-x+1 ضریب x^2 مثبت است و چون $\Delta<0$ است، نتیجه می‌گیریم که حاصل x^2-x+1 همواره مثبت است. عبارت زیر رادیکال باید مثبت یا صفر شود.

$$(4-x^2)(x^2-x+1)\geq 0 \xrightarrow{x^2-x+1>0} 4-x^2\geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2-4\leq 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)(x+2)\leq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} \{-2,-1,0,1,2\}$$

۲۸. گزینهٔ ۲ $x^2(x^2-4)^2\geq 0 \Rightarrow -x^2(x^2-4)\leq 0$

پس عبارت زیر رادیکال همواره منفی یا ۰ است و تنها هنگامی که ۰ شود می‌تواند قابل قبول باشد:

$$x^2(x^2-4)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2,-2 \end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع $\{-2,0,2\}$ است.

۲۹. گزینهٔ ۲

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \to \frac{x-1}{x+1}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\geq 1 \\ x\leq -1 \end{cases} \Rightarrow (-\infty,-1)\cup[1,+\infty) \quad \boxed{\text{I}}$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \to \frac{x+1}{x-1}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\geq 1 \\ x\leq -1 \end{cases} \Rightarrow (-\infty,-1]\cup(1,+\infty) \quad \boxed{\text{II}}$$

$$\sqrt{1-2x} \to 1-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq \frac{1}{2} \Rightarrow (-\infty,\frac{1}{2}] \quad \boxed{\text{III}}$$

از اشتراک بازه‌های I، II و III، بازهٔ $(-\infty,-1)$ به‌دست می‌آید.

۳۰. گزینهٔ ۲

$$2x-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2-2x\leq 0 \Rightarrow x(x-2)\leq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 2$$

$$\Rightarrow -2\leq -x\leq 0 \Rightarrow 1\leq 3-x\leq 3 \to [1,3]$$

۳۱. گزینهٔ ۲

$$\sqrt{x-1} \Rightarrow x\geq 1 \quad \boxed{\text{I}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2-\sqrt{x-1}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\leq 2 \Rightarrow x-1\leq 4$$

$$\Rightarrow x\leq 5 \quad \boxed{\text{II}} \xrightarrow{\text{اشتراک II, I}} 1\leq x\leq 5 \Rightarrow [1,5]$$

۳۲. گزینهٔ ۲ مسئله را در دو حالت $x\geq -2$ و $x<-2$ در نظر می‌گیریم:

$$x+|x+2|\geq 0 \xrightarrow{x\geq -2} x+x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$$

$$x+|x+2|\geq 0 \xrightarrow{x<-2} x-x-2\geq 0 \to$$

پس دامنهٔ $f(x)$ برابر با $[-1,+\infty)$ است. پس دامنهٔ $f(-x)$ برابر با $(-\infty,1]$ است که $x\leq 1$ را می‌دهد.

۳۳. گزینهٔ ۱ مسئله را در دو حالت $x\geq 0$ و $x<0$ بررسی می‌کنیم:

$$x^2-|x|-2\geq 0 \xrightarrow{x\geq 0} x^2-x-2\geq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)\geq 0 \Rightarrow$$

$$x\geq 2 \text{ یا } x\leq -1 \xrightarrow{x\geq 0} x\geq 2 \quad \boxed{\text{I}}$$

$$x^2-|x|-2\geq 0 \xrightarrow{x<0} x^2+x-2\geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)\geq 0 \Rightarrow$$

$$x\leq -2 \text{ یا } x\geq 1 \xrightarrow{x<0} x\leq -2 \quad \boxed{\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{I, II}} x\geq 2 \text{ یا } x\leq -2$$

۳۴. گزینه ۴ به دلیل $\sqrt{x}$ متوجه می‌شویم که $x \ge ۰$، سپس مسئله را در دو حالت $x=۰$ و $x>۰$ بررسی می‌کنیم. ابتدا حالت $x>۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x-\sqrt{x}} \to x-\sqrt{x}\ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)\ge ۰ \xrightarrow{\sqrt{x}>۰}$$
$$\sqrt{x}-۱\ge ۰\Rightarrow\sqrt{x}\ge ۱\Rightarrow x\ge ۱ \ \boxed{I}$$
$$x-\sqrt{x}<x \overset{\boxed{I}}{\Rightarrow} \sqrt{x-\sqrt{x}}<\sqrt{x}\Rightarrow -\sqrt{x-\sqrt{x}}>-\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow x-\sqrt{x-\sqrt{x}}>x-\sqrt{x}\xrightarrow{x-\sqrt{x}\ge ۰} x-\sqrt{x-\sqrt{x}}\ge ۰$$

پس $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ به ازای $x\ge ۱$ تعریف می‌شود. سپس حالت $x=۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$f(۰)=\sqrt{۰-\sqrt{۰-\sqrt{۰}}} \Rightarrow \text{تعریف می‌شود}$$

با توجه به I نتیجه می‌شود که دامنهٔ تابع $[۱,+\infty)\cup\{۰\}$ است.

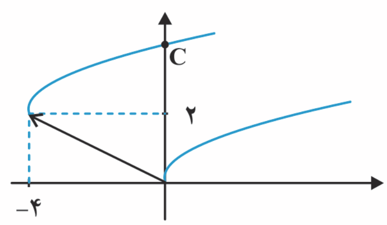
۳۵. گزینه ۱

$$f(x)=a+\sqrt{x+b} \Rightarrow x+b\ge ۰ \Rightarrow x\ge -b \Rightarrow$$
$$D_f=[-b,+\infty)\Rightarrow b=۴$$
$$\sqrt{x+b}\ge ۰\Rightarrow a+\sqrt{x+b}\ge a\Rightarrow R_f=[a,+\infty)\Rightarrow a=-۳$$

پس با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، نقطهٔ تلاقی تابع با محور xها را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-۳+\sqrt{x+۴}\xrightarrow{f(x)=۰}-۳+\sqrt{x+۴}=۰$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+۴}=۳\Rightarrow x=۵$$

۳۶. گزینه ۲ با توجه به شکل، متوجه می‌شویم که نمودار $y=a+\sqrt{x+b}$ از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ به اندازهٔ ۴ واحد به چپ و ۲ واحد به بالا به دست آمده است:



$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} y=\sqrt{x+۴}\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}}$$
$$y=۲+\sqrt{x+۴}\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۴$$

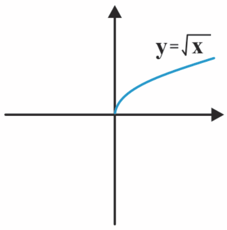
برای نقطهٔ $(۰,C)$ داریم:

$$y=۲+\sqrt{x+۴}\xrightarrow{(۰,C)} C=۲+\sqrt{۴}\Rightarrow C=۴$$

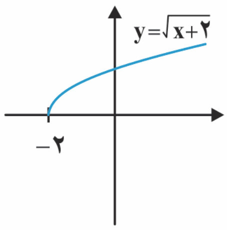
۳۷. گزینه ۲ تابع از نقاط $(۰,۱)$ و $(-۵,۰)$ گذشته است، پس:

$$y=a+\sqrt{x+b}\xrightarrow{(۰,۱)} a+\sqrt{b}=۱\Rightarrow \sqrt{b}=۱-a$$
$$\Rightarrow b=۱-۲a+a^۲ \ \boxed{I}$$
$$y=a+\sqrt{x+b}\xrightarrow{(-۵,۰)} a+\sqrt{b-۵}=۰\Rightarrow \sqrt{b-۵}=-a$$
$$\Rightarrow b=۵+a^۲ \ \boxed{II}$$
$$\xrightarrow{I\,,\,II} ۱-۲a=۵\Rightarrow a=-۲$$
$$۱=a+\sqrt{b}\xrightarrow{a=-۲} -۲+\sqrt{b}=۱\Rightarrow b=۹\Rightarrow ab=-۱۸$$

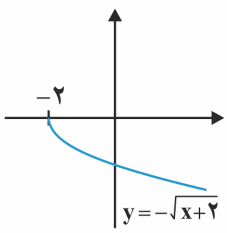
۳۸. گزینه ۲ نمودار $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



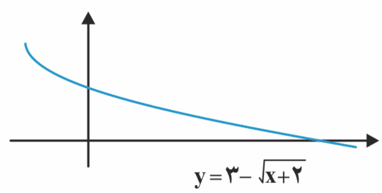
نمودار $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $y=\sqrt{x+۲}$ حاصل شود:



نمودار $y=\sqrt{x+۲}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا $y=-\sqrt{x+۲}$ حاصل شود:



نمودار $y=-\sqrt{x+۲}$ را ۳ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا $y=۳-\sqrt{x+۲}$ حاصل شود:



۳۹. گزینه ۴ ابتدا دامنهٔ تابع را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{۱-x^۲}\to ۱-x^۲\ge ۰\Rightarrow (۱-x)(۱+x)\ge ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(x+۱)\le ۰\Rightarrow -۱\le x\le ۱$$

برای برد تابع داریم:

$$-۱\le x\le ۱\Rightarrow ۰\le x^۲\le ۱\Rightarrow -۱\le -x^۲\le ۰\Rightarrow$$
$$۰\le ۱-x^۲\le ۱\Rightarrow ۰\le\sqrt{۱-x^۲}\le ۱\Rightarrow ۰\le y\le ۱$$

پس برد تابع $[۰,۱]$ است.

۴۰. گزینه ۲

$$(x+۱)^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲+۲x+۱\ge ۰\Rightarrow x^۲+۲x+۳\ge ۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^۲+۲x+۳}\ge\sqrt{۲}\Rightarrow f(x)\ge\sqrt{۲}\Rightarrow R_f=[\sqrt{۲},+\infty)$$

۴۱. گزینه ۲ دامنهٔ دو تابع برابر باید برابر باشند.

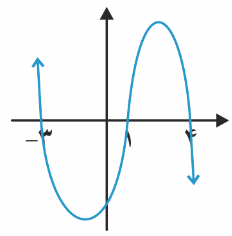
$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+۲}}\Rightarrow\frac{x}{x+۲}\Rightarrow\frac{x}{x+۲}\ge ۰\Rightarrow$$
$$D_f=(-\infty,-۲)\cup[۰,+\infty)$$
$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۲}}\Rightarrow x\ge ۰\ ,x>-۲\Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)$$
$$\Rightarrow D_f\ne D_g\Rightarrow f\ne g$$

$$p(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x^{۲}+۱}\xrightarrow{x^{۲}+۱>۰}x\geq ۰\Rightarrow D_p=[۰,+\infty)$$
$$q(x)=\sqrt{x^{۳}+x}=\sqrt{x(x^{۲}+۱)}\Rightarrow x(x^{۲}+۱)\geq ۰\xrightarrow{x^{۲}+۱>۰}$$
$$x\geq ۰\Rightarrow D_q=[۰,+\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow D_p=D_q\\ p(x)=\sqrt{x}.\sqrt{x^{۲}+۱}=\sqrt{x(x^{۲}+۱)}=\sqrt{x^{۳}+x}=q(x)\end{array}\right\}\Rightarrow p=q$$

۴۲. گزینه۳ جـدول تعیین علامت عبـارت $xf(x)$ را در نظـر می‌گیریم:

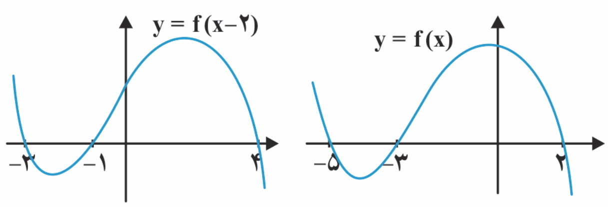
		-۳		۰		۱		۴	
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	۰	$-$
$xf(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$



باید $xf(x)\geq ۰$ باشد، با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$xf(x)\geq ۰\Rightarrow[-۳,۰]\cup[۱,۴]$$

۴۳. گزینه۴ ابتدا نمودار را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=f(x)$ به دست آید.



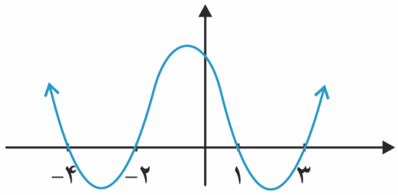
حل جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

		-۵		-۳		۰		۲	
x	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
$xf(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$xf(x)\geq ۰\Rightarrow x\in[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

۴۴. گزینه۴ جدول تعیین علامت عبارت $(x+۱)f(x)$ را در نظر می‌گیریم:

		-۴		-۲		-۱		۱		۳	
$x+۱$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
$(x+۱)f(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$



بـا توجـه بـه عبـارت $\dfrac{۱}{\sqrt{(x+۱)f(x)}}$ متوجـه مـی‌شـویم کـه $(x+۱)f(x)>۰$ باشد، و با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$(x+۱)f(x)>۰\Rightarrow(-۴,-۲)\cup(-۱,۱)\cup(۳,+\infty)$$

تابع جزء صحیح

۴۵. گزینه۴

$$\left[-\frac{۵}{۲}\right]=[-۲٫۵]=-۳\Rightarrow\left|\left[-\frac{۵}{۲}\right]\right|=۳$$
$$\left[\frac{۳}{۲}\right]=[۱٫۵]=۱\Rightarrow\left[\left|-\frac{۳}{۲}\right|\right]=۱$$
$$f(-\frac{۱}{۲})=\left|\left[-\frac{۵}{۲}\right]\right|-\left[\left|-\frac{۳}{۲}\right|\right]=۳-۱=۲$$

۴۶. گزینه۱

$$\sqrt{۳}\simeq ۱٫۷\Rightarrow ۱-\sqrt{۳}\simeq -۰٫۷\Rightarrow -۱<۱-\sqrt{۳}<۰\Rightarrow$$
$$۰<(۱-\sqrt{۳})^{۲}<۱\Rightarrow ۰<(۱-\sqrt{۳})^{۲۰}<۱\Rightarrow[(۱-\sqrt{۳})^{۲۰}]=۰$$

۴۷. گزینه۲

$$y=\frac{۱}{\sqrt{[x]-۱}}\Rightarrow[x]-۱>۰\Rightarrow[x]>۱\Rightarrow x\geq ۲$$

۴۸. گزینه۲

$$\frac{x-۱}{۴-x}>۰\Rightarrow\frac{x-۱}{x-۴}<۰\Rightarrow ۱<x<۴\Rightarrow ۱<\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱$$

۴۹. گزینه۱

$$\left[\frac{x}{۲}\right]=۱\Rightarrow ۱\leq\frac{x}{۲}<۲\Rightarrow ۲\leq x<۴$$
$$A=\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^{۲}}=|x-۲|\xrightarrow{x\geq ۲}A=x-۲$$
$$B=\sqrt{x^{۲}-۸x+۱۶}=\sqrt{(x-۴)^{۲}}=|x-۴|\xrightarrow{x<۴}B=۴-x$$
$$\Rightarrow A+B=x-۲+۴-x=۲$$

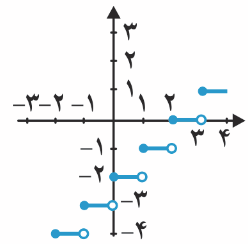
۵۰. گزینه۲ در هر تابع بررسی می‌کنیم مخرج در کجا صفر می‌شود.

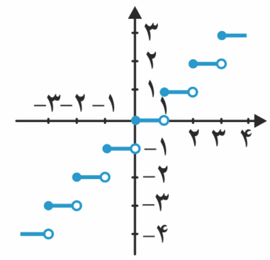
$$f(x):\left[\frac{x^{۲}}{۴}\right]=۰\Rightarrow ۰\leq\frac{x^{۲}}{۴}<۱\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^{۲}}{۴}\geq ۰\Rightarrow x\in\mathbb{R}\\ \dfrac{x^{۲}}{۴}<۱\Rightarrow x\in(-۲,۲)\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\cap}x\in(-۲,۲)\Rightarrow D_f=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$$
$$g(x):\left[\frac{x^{۲}-۴}{۵}\right]=۰\Rightarrow ۰\leq\frac{x^{۲}-۴}{۵}<۱$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{۵}\geq ۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)\\ \dfrac{x^{۲}-۴}{۵}<۱\Rightarrow x\in(-۳,۳)\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\cap}x\in(-۳,-۲]\cup[۲,۳)\Rightarrow D_g=(-\infty,-۳]\cup(-۲,۲)\cup[۳,+\infty)$$

۵۱. گزینهٔ ۱

$f(x)=[x-۳]+a=[x]+a-۳$

اکنون نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)=[x]$ را بررسی می‌کنیم:





با توجه به مقایسهٔ نمودار، متوجه می‌شویم که نمودار $f(x)$ انتقال یافتهٔ نمودار $g(x)$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت پایین است:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=[x]+a-۳ \\ f(x)=g(x)-۲=[x]-۲ \end{array}\right\}\Rightarrow a-۳=-۲\Rightarrow a=۱$$

۵۲. گزینهٔ ۲

$$x+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

پس مخرج به ازای $x\in\mathbb{Z}$ برابر با صفر می‌شود، در نتیجه دامنه به صورت $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ است. اگر $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$f(x)=\frac{-x}{[x]+[-x]}=\frac{-x}{-۱}=x$$

پس ضابطهٔ $f(x)=x$ را داریم، به طوری که نقاط به طول عدد صحیح در دامنه نیستند.

۵۳. گزینهٔ ۲

$x\in(-۲,-\sqrt{۳}]\to[x^۲]=۳$

$x\in(-\sqrt{۳},-\sqrt{۲}]\to[x^۲]=۲$

$x\in(-\sqrt{۲},-۱]\to[x^۲]=۱$

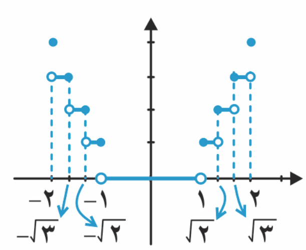
$x\in(-۱,۱)\to[x^۲]=۰$

$x\in[۱,\sqrt{۲})\to[x^۲]=۱$

$x\in[\sqrt{۲},\sqrt{۳})\to[x^۲]=۲$

$x\in[\sqrt{۳},۲)\to[x^۲]=۳$

پس نمودار به شکل زیر می‌شود:



۵۴. گزینهٔ ۲ تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x[۲x]=\begin{cases} -x & -\frac{۱}{۲}<x<۰ \\ ۰ & ۰\le x<\frac{۱}{۲} \\ x & \frac{۱}{۲}\le x<۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ بالا، گزینهٔ ۲ درست است.

۵۵. گزینهٔ ۲ تابع را به صورت چند ضابطه‌ای درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=x(۳-[x])=\begin{cases} ۳x & ۰\le x<۱ \\ ۲x & ۱\le x<۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\to y=۲x\xrightarrow{x=۱}y=۲\Rightarrow a=۲ \\ c\to y=۲x\xrightarrow{x=۲}y=۴\Rightarrow c=۴ \\ b\to y=۳x\xrightarrow{x=۱}y=۳\Rightarrow b=۳ \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a+c}{b}=\frac{۲+۴}{۳}=۲$$

۵۶. گزینهٔ ۳

$$\left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=۰ \\ x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -x & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ بالا، نمودار گزینهٔ ۳ درست است.

۵۷. گزینهٔ ۲

$[x]+[-x]=۰$ یا -۱

$f(x)=[x+۲]+[-x]=[x]+۲+[-x]=\underbrace{[x]+[-x]}_{۰\text{ یا }-۱}+۲=۱$ یا ۲

۵۸. گزینهٔ ۱

$$[۳x-۲]=-۴\Rightarrow-۴\le۳x-۲<-۳\Rightarrow-۲\le۳x<-۱\Rightarrow -\frac{۲}{۳}\le x<-\frac{۱}{۳}$$

۵۹. گزینهٔ ۴ در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول : $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=۰\quad\boxed{I}$

$۲[x]+[۱-x]=۲\Rightarrow۲[x]+۱+[-x]=۲\Rightarrow[x]+[x]+[-x]=۱$

$\xrightarrow{\boxed{I}}[x]=۱\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=۱$

حالت دوم : $x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[x]+[-x]=-۱$

$۲[x]+[۱-x]=۲\Rightarrow۲[x]+۱+[-x]=۲\Rightarrow[x]+[x]+[-x]=۱$

$[x]-۱=۱\Rightarrow[x]=۲\xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}}x\in(۲,۳)$

۶۰. گزینهٔ ۲ $۲x+[x]=۱\Rightarrow۲x=۱-[x]\Rightarrow۲x\in\mathbb{Z}$

چون $۲x$ عددی صحیح است، نتیجه می‌گیریم یا x عددی صحیح است یا به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ از عددی صحیح بیش‌تر است. با فرض $K\in\mathbb{Z}$، دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$x=K\to۲x+[x]=۱\Rightarrow۲K+K=۱\Rightarrow K=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{K\in\mathbb{Z}}$ قابل قبول نیست.

$x=K+\frac{۱}{۲}\to۲x+[x]=۱\Rightarrow۲K+۱+K=۱\Rightarrow K=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$

۶۱. گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم K عددی صحیح باشد، مسئله را در سه حالت:

$K\le x<K+\frac{۱}{۳}$، $K+\frac{۱}{۳}\le x<K+\frac{۲}{۳}$ و $K+\frac{۲}{۳}\le x<K+۱$

بررسی می‌کنیم:

$$K\le x<K+\frac{۱}{۳}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} [x]=K\Rightarrow۳[x]=۳K \\ ۳K\le۳x<K+۱\Rightarrow[۳x]=۳K \end{array}\right\}\Rightarrow۳[x]=[۳x]$$

$K+\frac{۱}{۳}\le x<K+\frac{۲}{۳}\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}[x]=K\Rightarrow ۳[x]=۳K\\ ۳K+۱\le ۳x<۳K+۲\Rightarrow [۳x]=۳K+۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۳[x]\ne[۳x]$$

$$K+\frac{۲}{۳}\le x<K+۱\Rightarrow \left.\begin{array}{l}[x]=K\Rightarrow ۳[x]=۳K\\ ۳K+۲\le ۳x<۳K+۳\Rightarrow[۳x]=۳K+۲\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۳[x]\ne[۳x]$$

پس تنها حالت $K\le x<K+\frac{۱}{۳}$ پاسخ مسئله است.

۶۲. گزینه ۲ فرض می‌کنیم K عددی صحیح باشد، مسئله را در دو حالت $K\le x<K+\frac{۱}{۲}$ و $K+\frac{۱}{۲}\le x<K+۱$ بررسی می‌کنیم:

$$K\le x<K+\frac{۱}{۲}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}[x]=K\\ K+\frac{۱}{۲}\le x+\frac{۱}{۲}<K+۱\Rightarrow[x+\frac{۱}{۲}]=K\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow [x]=\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$$

$$K+\frac{۱}{۲}\le x<K+۱\Rightarrow \left.\begin{array}{l}[x]=K\\ K+۱\le x+\frac{۱}{۲}<K+\frac{۳}{۲}\Rightarrow[x+\frac{۱}{۲}]=K+۱\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow [x]\ne\left[x+\frac{۱}{۲}\right]$$

پس باید $K\le x<K+\frac{۱}{۲}$ باشد، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}۲[x]=۲K\\ ۲K\le ۲x<۲K+۱\Rightarrow[۲x]=۲K\end{array}\right\}\Rightarrow[۲x]=۲[x]$$

۶۳. گزینه ۲ فرض می‌کنیم $a=K+t$ که در آن $[a]=K$ و در نتیجه $۰\le t<۱$، پس:

$$f(a)=a+[a]=K+t+K=۲K+t$$

$$f(a)=\frac{۷}{۳}\Rightarrow ۲K+t=\frac{۷}{۳}\Rightarrow ۲K+t=۲+\frac{۱}{۳}\Rightarrow K=۱\,,t=\frac{۱}{۳}$$

$$a=K+t=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

درس دوم: آشنایی با برخی از ویژگی‌های توابع

تابع یک به یک

۶۴. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}(m,۳)\\(-۱,۳)\end{array}\right\}\Rightarrow m=-۱$$

$$\left.\begin{array}{l}(۲m,a)\\(-۲,۲)\end{array}\right\}\xrightarrow{m=-۱}\left.\begin{array}{l}(-۲,a)\\(-۲,۲)\end{array}\right\}\Rightarrow a=۲$$

۶۵. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}(۲,۵)\\(m^۲-m,۵)\end{array}\right\}\Rightarrow m^۲-m=۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow m=۲ \text{ یا } -۱$$

$$m=۲\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(۳,۱)\\(۳,۲)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$m=-۱\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(۳,۱)\\(۳,-۱)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تابع نیست}$$

۶۶. گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}(a^۲,۴)\\(۶+a,۴)\end{array}\right\}\Rightarrow a^۲=۶+a\Rightarrow a^۲-a-۶=۰$$

$$\Rightarrow (a-۳)(a+۲)\Rightarrow a=۳ \text{ یا } -۲$$

اگر $a=۳$ باشد، داریم: $\left.\begin{array}{l}(a^۲,۴)\\(۹,۷)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(۹,۴)\\(۹,۷)\end{array}\right\}\Rightarrow$ تابع نیست

ولی اگر $a=-۲$ باشد، تابعی یک به یک داریم.

۶۷. گزینه ۴ در یک تابع یک به یک، نباید هیچ خطی موازی محور xها وجود داشته باشد که تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند. این موضوع تنها در گزینهٔ ۴ مشاهده می‌شود.

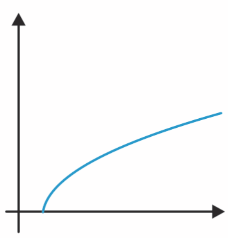
۶۸. گزینه ۳

گزینهٔ (۱): $\left.\begin{array}{l}x=۱\Rightarrow y=۱\\x=-۱\Rightarrow y=۱\end{array}\right\}\Rightarrow$ یک به یک نیست

گزینهٔ (۲): $\left.\begin{array}{l}x=۱\Rightarrow y=۱\\x=-۱\Rightarrow y=۱\end{array}\right\}\Rightarrow$ یک به یک نیست

گزینهٔ (۴): $\left.\begin{array}{l}x=۱\Rightarrow y=۱\\x=-۱\Rightarrow y=۱\end{array}\right\}\Rightarrow$ یک به یک نیست

اما تابع $y=\sqrt{x-۱}$ یک به یک است، زیرا نمودارش به شکل مقابل است و هیچ خط موازی محور xها وجود ندارد که آن را در بیش از یک نقطه قطع کند.

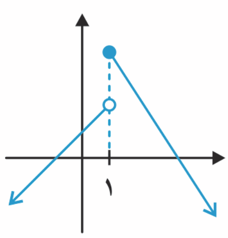


۶۹. گزینه ۲ تابع f را به این صورت در نظر می‌گیریم:

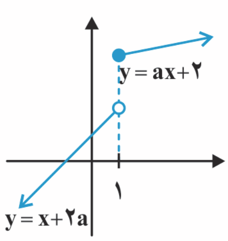
$$f:\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),\ldots,(۹,i)\}$$

چون تابع یک به یک است، نتیجه می‌گیریم که مقدار هیچ کدام از حروف $a,b,c,\ldots,i$ با هم برابر نیست. پس $(a,b,c,\ldots,i)$ جایگشتی از اعداد $(۱,۲,۳,\ldots,۹)$ است، تعداد جایگشت‌ها می‌شود !۹.

۷۰. گزینه ۲ اگر a منفی باشد، تابع یک به یک نمی‌شود، زیرا نمودارش به شکل مقابل می‌شود:



بنابراین a مثبت است و نمودار تقریباً به شکل مقابل می‌شود:



با توجه به شکل، مقدار y در نقطه‌ای به طول ۱ در خط $y=ax+۲$ باید بیشتر از خط $y=x+۲a$ یا مساوی با آن باشد:

$$\left.\begin{array}{l}y=x+۲a\xrightarrow{x=۱}y=۱+۲a\\ y=ax+۲\xrightarrow{x=۱}y=a+۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۱+۲a\le a+۲\Rightarrow a\le ۱$$

$$\Rightarrow ۰<a\le ۱$$

۷۱. گزینه ۴

$$f(x)=a^۲x-۴ax+۳=(a^۲-۴a)x+۳$$

پس f یک تابع خطی است. یک تابع خطی یک به یک است. مگر این‌که تابع ثابت باشد، پس ضریب x باید صفر باشد:

$$a^۲-۴a=۰\Rightarrow a(a-۴)=۰\Rightarrow a=۰ \text{ یا } ۴$$