

$$\frac{1}{\sin^2 m^2}$$

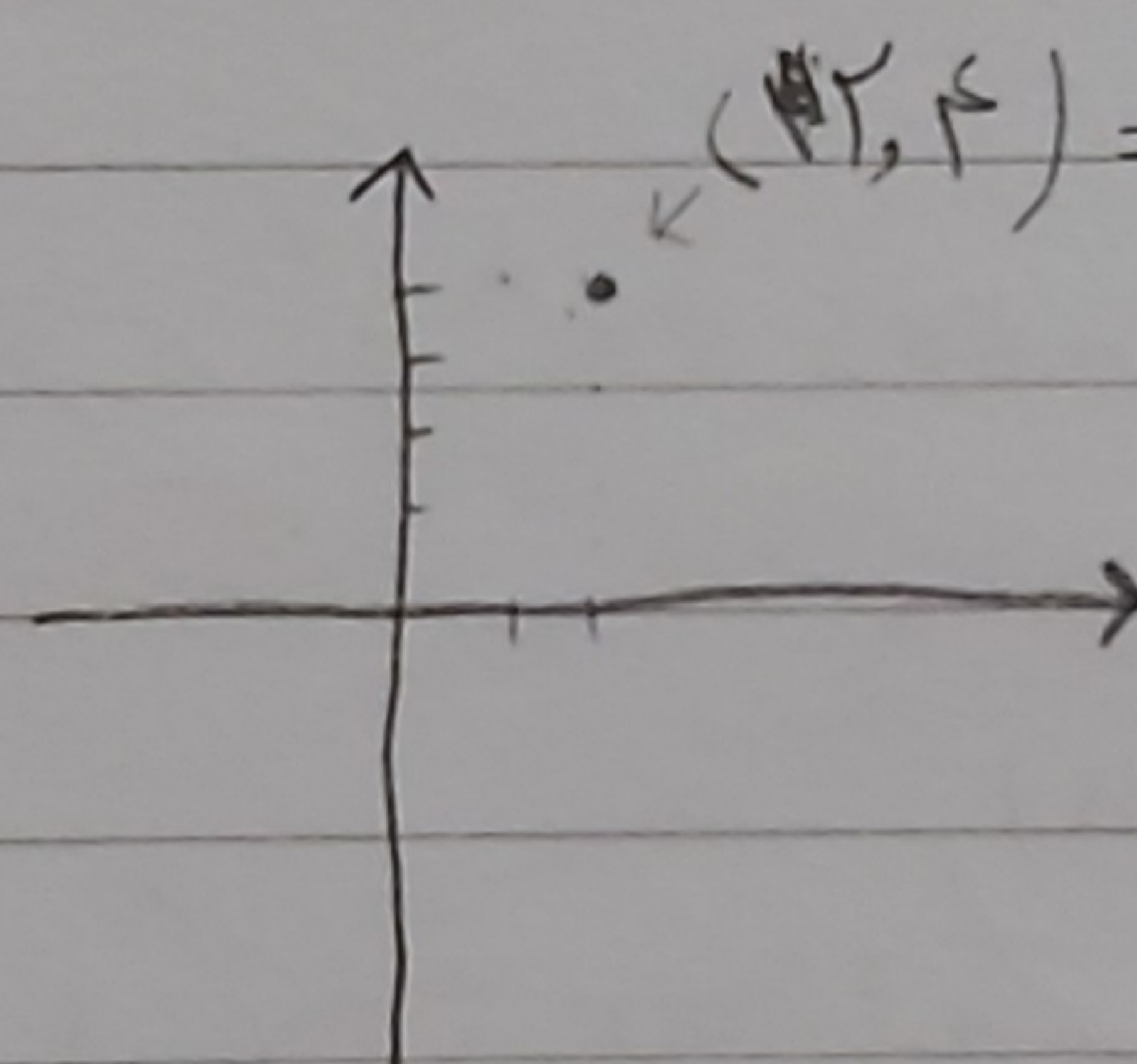
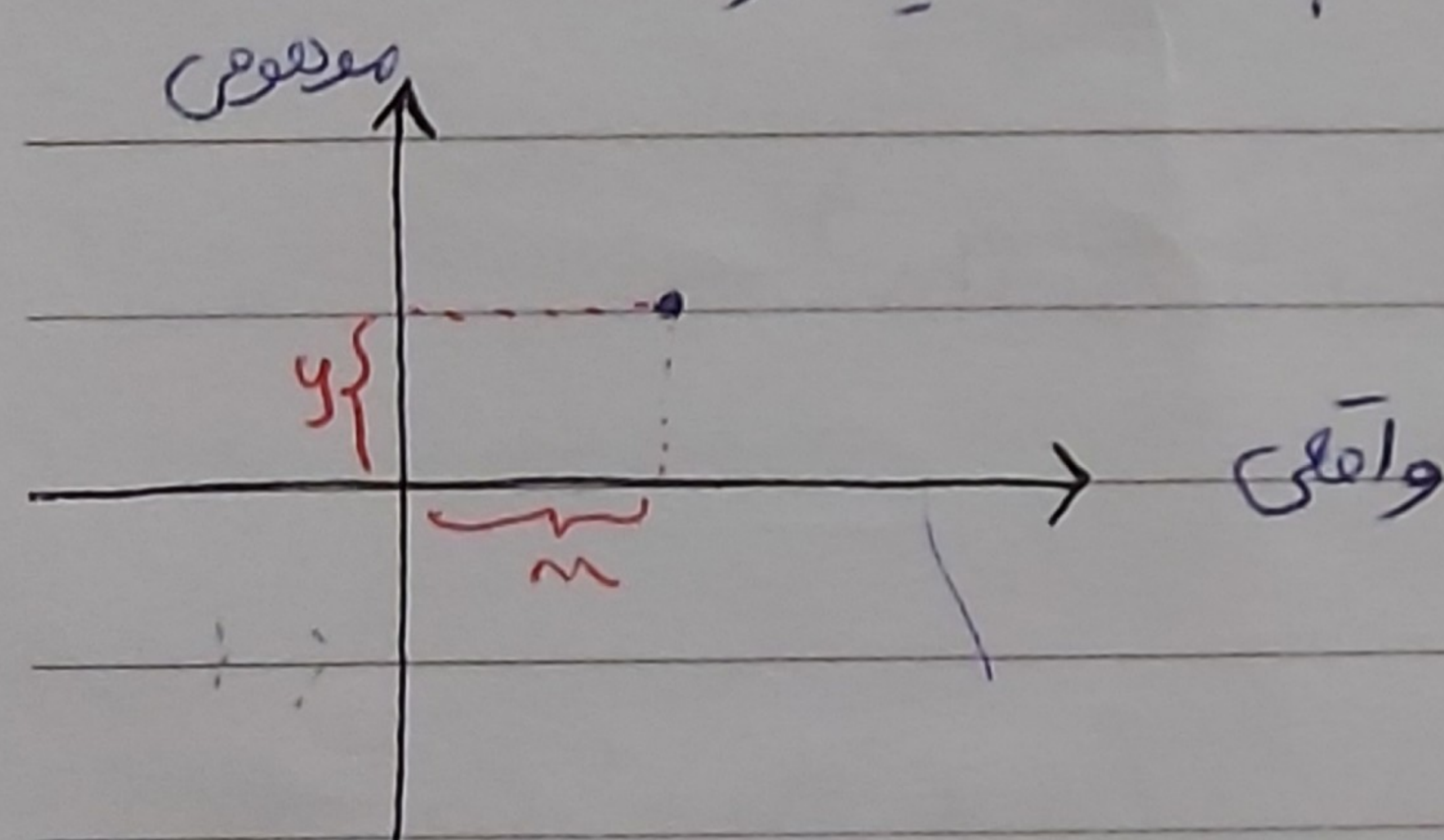
$$(\sin m^2)^2$$

اعداد مختلط :

زوج مرتب (n, y) را به عنوان نقطه‌ای در صفحه $\mathbb{R}^2$ می‌شناسیم

اگر n را مؤلفه حقیقی یا Real و y را مؤلفه ^{خیال} موهومی یا Image بنامیم

آنها را می‌توان (n, y) را به عنوان یک عدد مختلط به صورت مقابل تعریف کرد:



$$(0, 1) = i$$

$$z = (n, y) = n + iy$$

احتمال روی اعداد مختلط. الف ← جمع و تفریق = اگر $A = (a, b)$ و $B = (c, d)$ روی در مختلط باشد حاصل جمع آنها

$$A + B = (a, b) + (c, d) \Rightarrow (a \pm c, b \pm d)$$

به این صورت است :

مثال. اگر $A = 3 - 3i$ و $B = -1 - 5i$ باشد

$$A + B = (3, -3) + (-1, -5) = (2, -8) = 2 - 8i$$

$$A - B = 3 - 3i - (-1 - 5i) = 4 + 2i = (4, 2)$$

$$(3, -3) - (-1, -5) = (4, 2) = 4 + 2i$$

ب ضرب: اگر $A = (a, b)$ و $B = (c, d)$ دو عدد مختلط باشد:

$$A \times B = (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

مثال. اگر $A = 3 - i$ و $B = 2 + 5i$

$$A \times B = (3, -1) \times (2, 5) = (6 + 5, 15 - 2) = (11, 13) = 11 + 13i$$

$$B \times A = (2, 5) \times (3, -1) = (6 + 5, -2 + 15) = (11, 13) = 11 + 13i$$

نکته: حاصل ضرب اعداد مختلط خاصیت جابجایی دارند.

تعریف مزدوج اعداد مختلط

اگر $A = m + iy$ یک عدد مختلط باشد مزدوج آن را با $\bar{A}$ نشان می‌دهند

$$\bar{A} = m - iy$$

صفا مجله‌ای که آن دارد منفی شود

مثال

$$A = 4 + 3i \rightarrow \bar{A} = 4 - 3i$$

$$B = -1 - 5i \rightarrow \bar{B} = -1 + 5i$$

ج. تقسیم: در تقسیم اعداد مختلط باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج

ضرب و تقسیم کنیم

$$\frac{2+i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(2,1) \times (3,-2)}{(3,2) \times (3,-2)} = \frac{(6+2, -4+3)}{(9+4, -9+6)} = \frac{(8, -1)}{(13, -3)}$$

$$= \frac{(8, -1)}{(13, -3)} = \frac{(8, -1)}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$$

$$1) \frac{4-4i}{-2-i} \times \frac{-2+i}{-2+i} = \frac{(4, -4) \times (-2, 1)}{(-2, -1) \times (-2, 1)} = \frac{(-12+4, 4+8)}{(4+1, -2+2)} = \frac{(-8, 12)}{5} = \frac{-8}{5} + \frac{12}{5}i$$

$$\{ \} i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0) = -1$$

نتیجه گیری = $i^2 = -1$ ← تنها در اعداد مختلط توان رو می شود -1

$$1) 3+2i = (3, 2)$$

مثال ←

$$2) A = \omega - i \quad B = 2i - 4 \quad A = (\omega, -1) \quad B = (-4, 2)$$

$$A+B = (-1, 2) = -1+2i \quad A-B = (11, -3) = 11-3i$$

$$3) A = -1 - \omega i \quad B = 4 - i \quad A = (-1, -\omega) \quad B = (4, -1)$$

$$A \times B = (-4 - \omega, 1 + (-2)) = -4 - \omega, -1 = -4 - \omega - i$$

$$4) = \frac{1+2i}{-\omega-4i} \times \frac{-\omega+4i}{-\omega+4i} = \frac{(1, 2) \times (-\omega, 4)}{(-\omega, -4) \times (-\omega, 4)} = \frac{(-4-\omega, 4-2\omega)}{(2\omega+16, -20+20)} = \frac{(-4-\omega, 4-2\omega)}{(4, 0)} = \frac{-4-\omega}{4} + \frac{4-2\omega}{4}i$$

$$* i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$

نکته

$$* i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = +1 \quad * i^0 = 1$$

$$* i^5 = i^4 \times i = (i^2)^2 \times i = 1 \times i = i \quad * i^1 = i$$

$$* i^{11} = i^{10} \times i = (i^2)^5 \times i = 1 \times i = i$$

بامشورتن دهد $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ؟ صحیح است

$$\omega) \begin{cases} z_1 = -1 - i \\ z_2 = 2 + 3i \end{cases}$$

$$z_1 + z_2 = 1 + 2i$$

$$\overline{z_1} = -1 + i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = 1 - 2i \quad \checkmark$$

$$\overline{z_1 + z_2} = 1 - 2i \quad \checkmark$$

$$\overline{z_2} = 2 - 3i$$

ثابت کنید: $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

4) $\begin{cases} z_1 = -1 - i \\ z_2 = 2 + 3i \end{cases}$

$z_1 \times z_2 = (-1, -1) \times (2, 3) = (-2 + 3, -3 - 2) = (1, -5) = 1 - 5i$ ✓

$\Rightarrow \overline{z_1 \times z_2} = \overline{1 - 5i} = 1 + 5i$ ✓

$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (-1, 1) \times (2, -3) = (-2 + 3, 2 + 2) = (1, 4) = 1 + 4i$ ✓

✓) $z_1 = -1 - i$

ثابت کنید: $z \times \overline{z} = |z|^2$

$z \times \overline{z} = (-1, -1) \times (-1, 1) = (1 + 1, -1 + 1) = (2, 0) = 2$ ✓

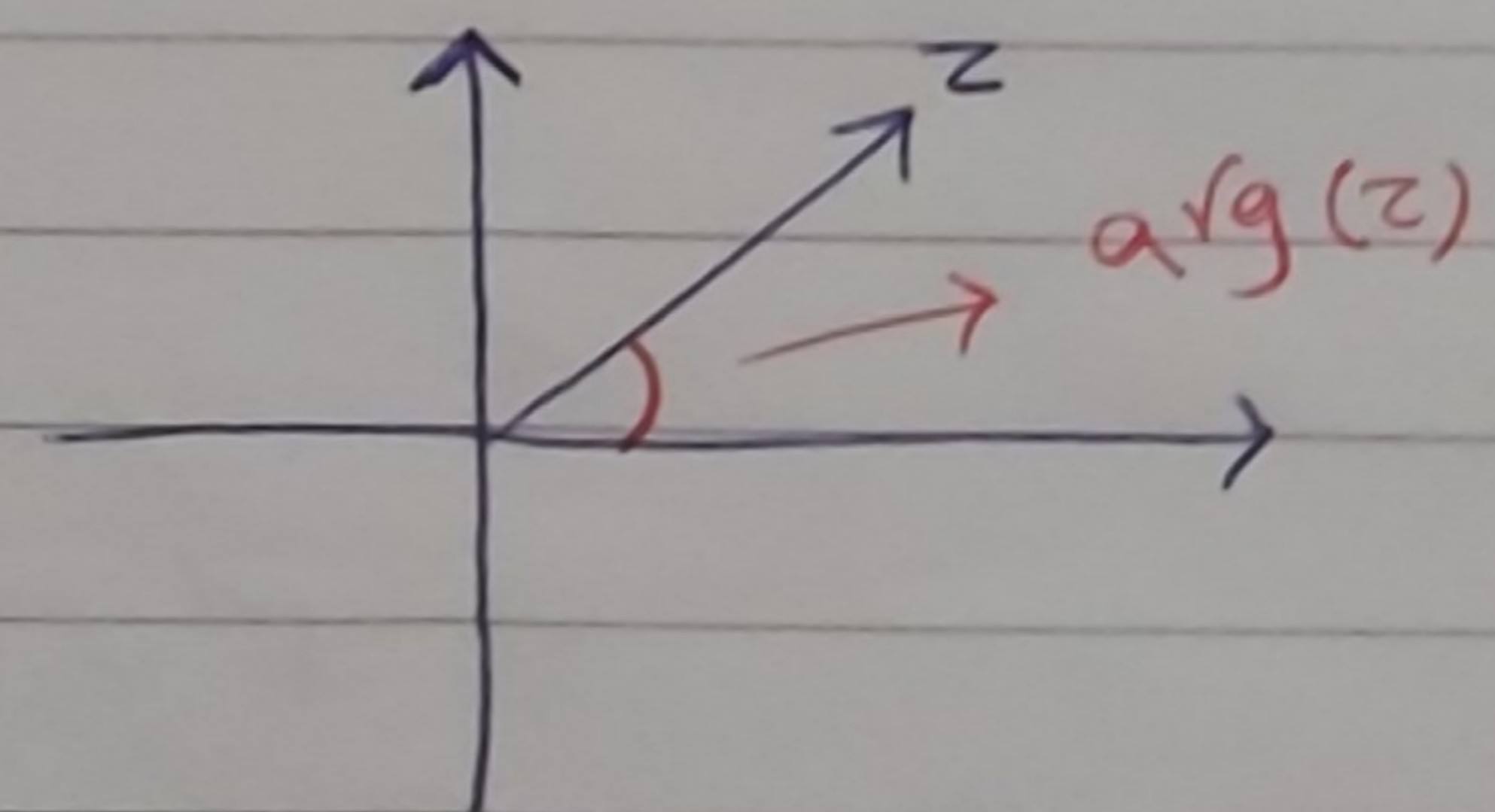
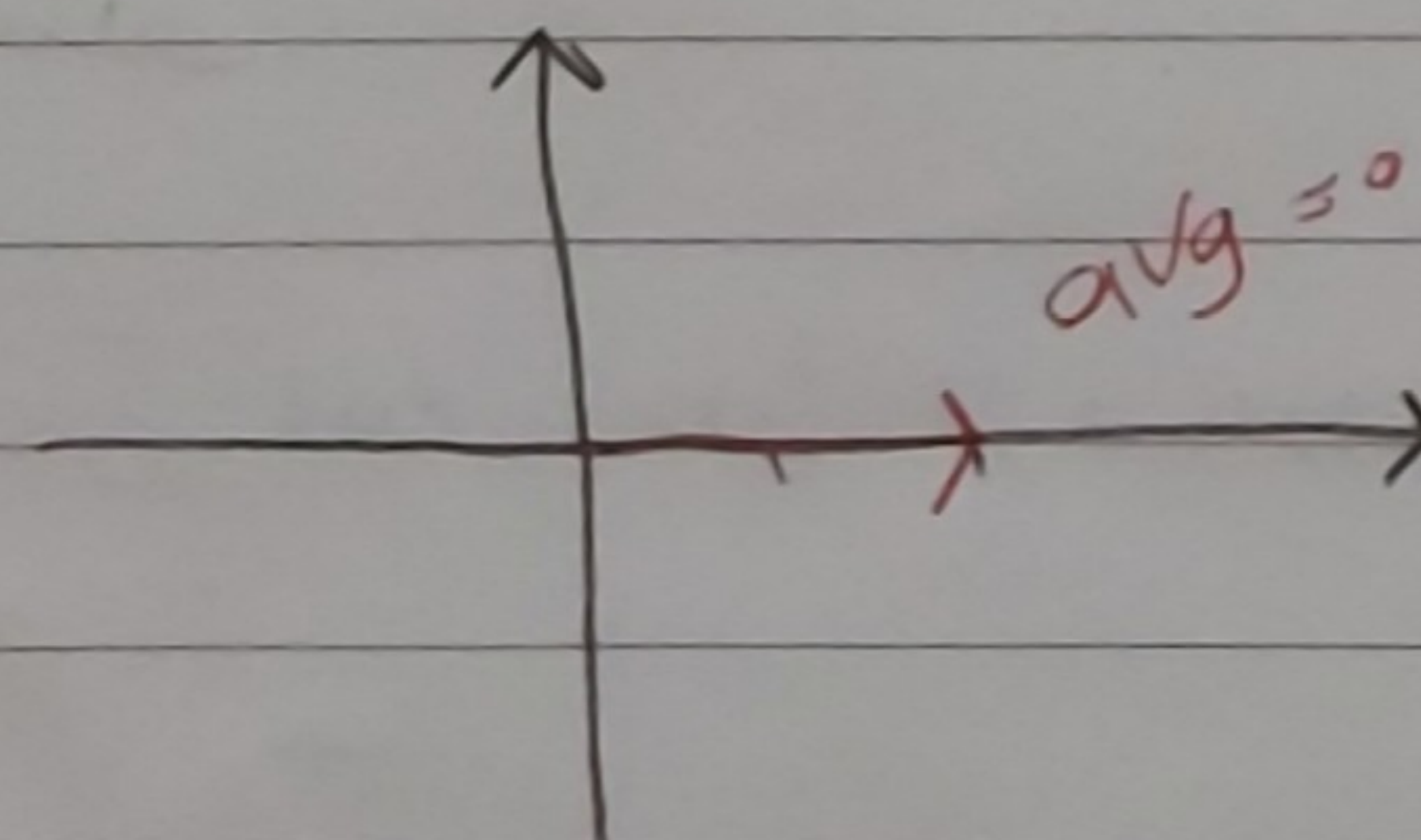
معر $|z| = \sqrt{(\text{قسمت حقیقی})^2 + (\text{قسمت مجرری})^2}$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = |z|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ ✓

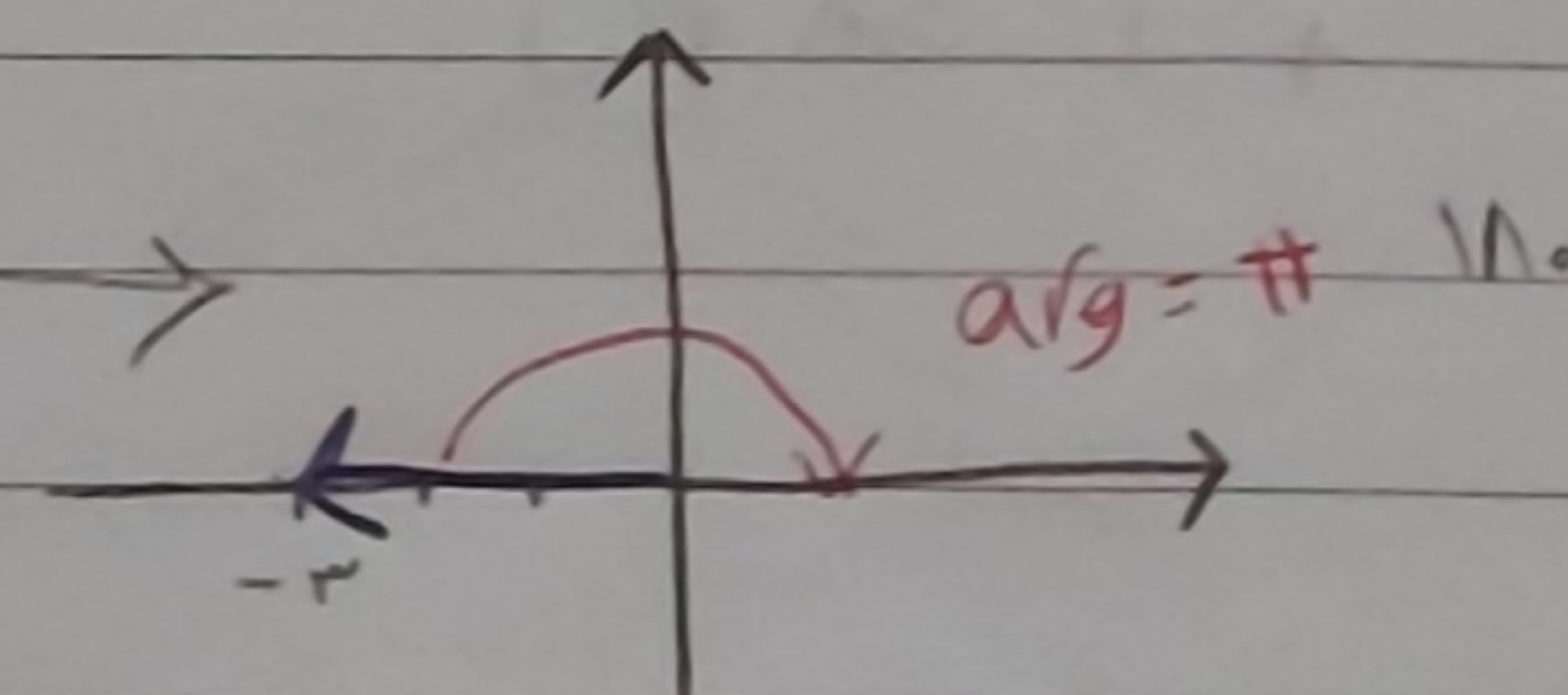
تعریف آرگومان $\arg$

مقدور از آرگومان یک عدد مختلط زاویه‌ای است که بردار z با جهت + محور x می‌کازد!

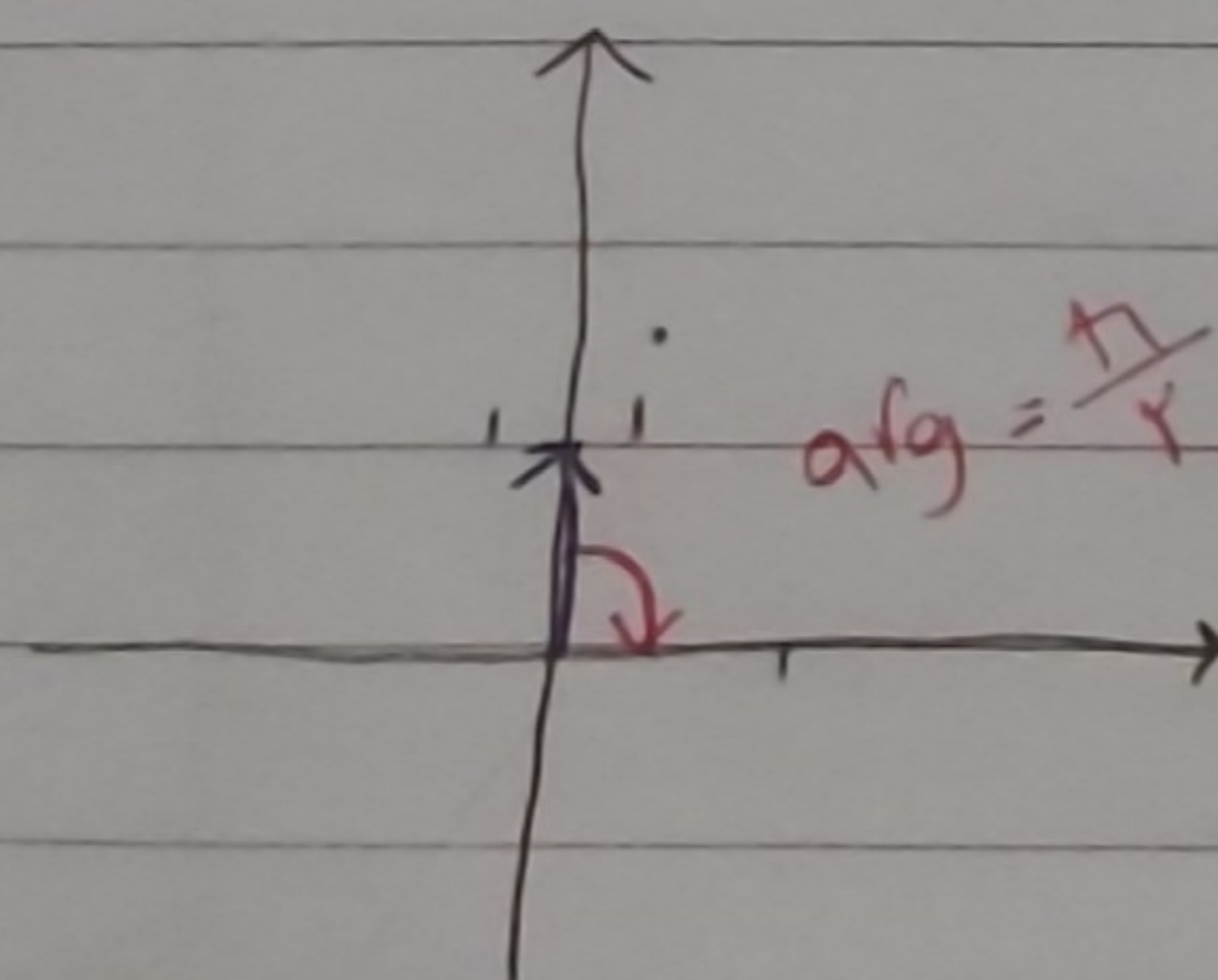
1) $z = 2 \quad (2, 0)$



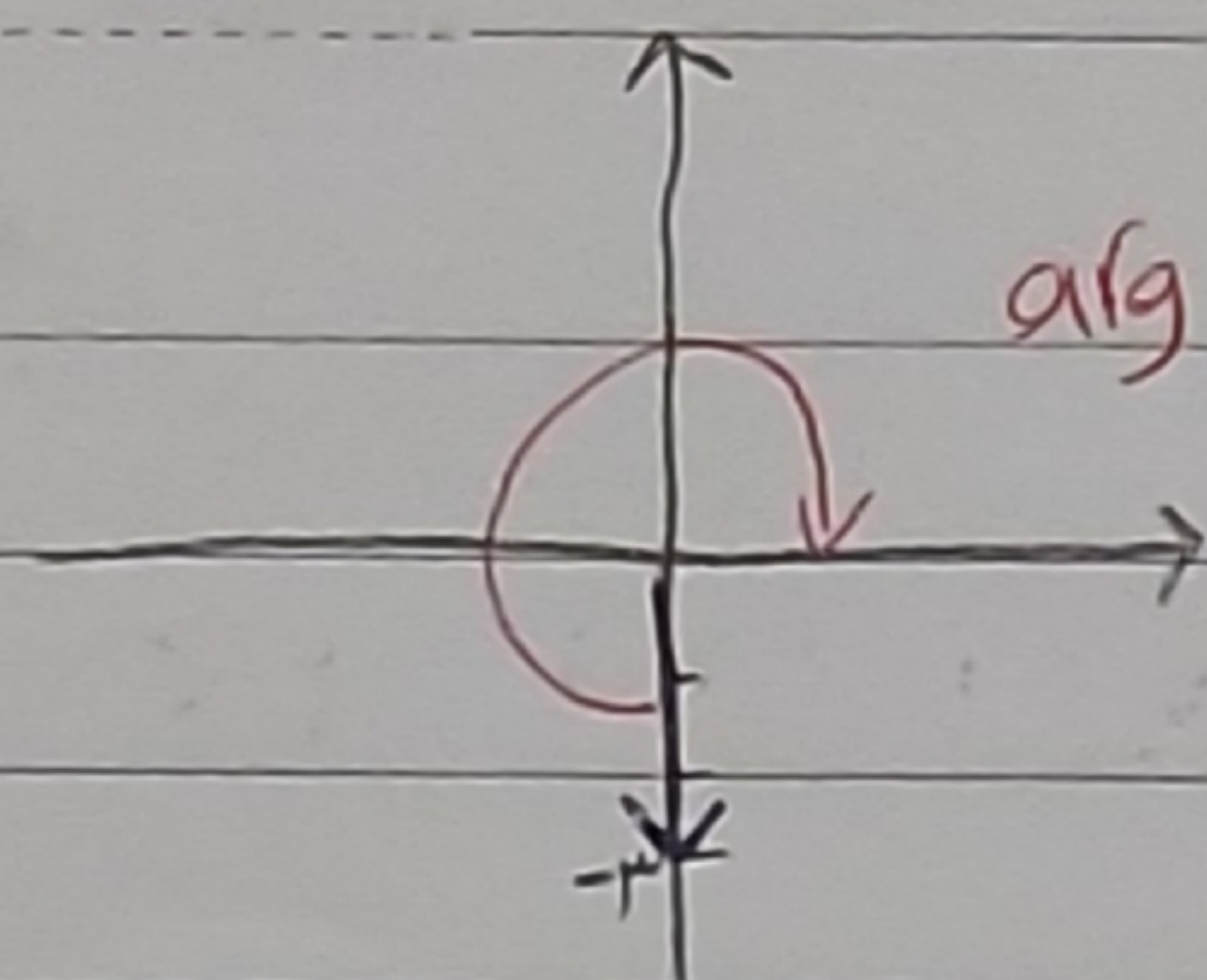
2) $z = -2 \quad (-2, 0)$



3) $z = i \quad (0, 1)$



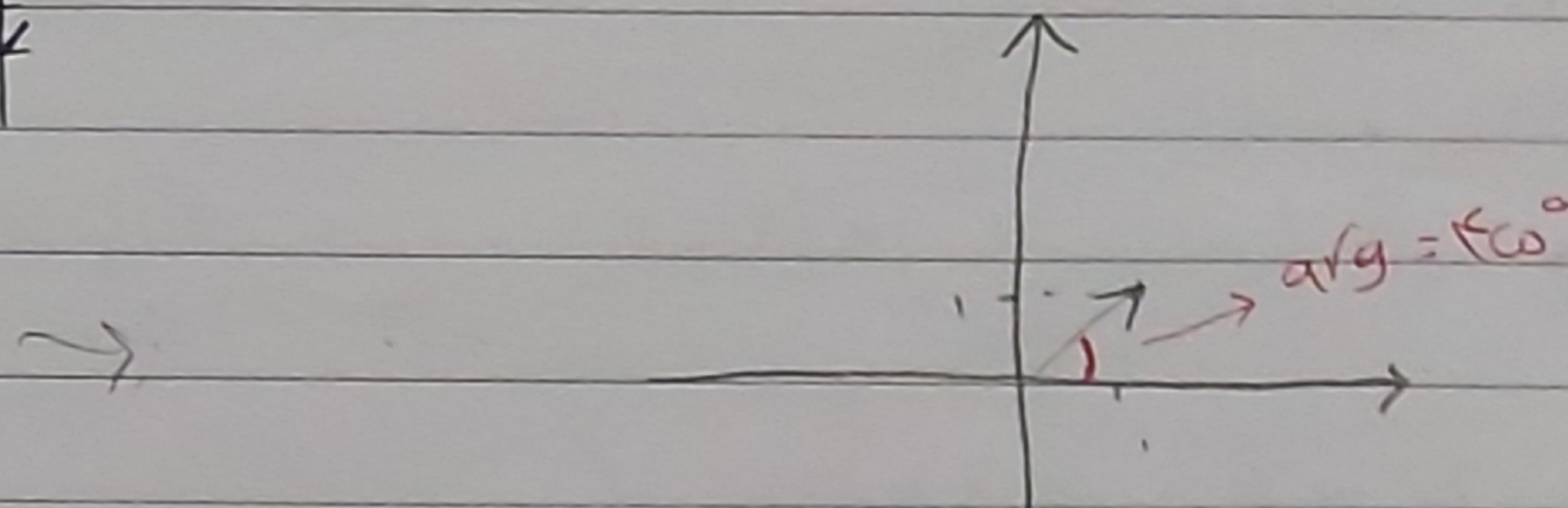
$$4) z = -3i \quad (0, -3)$$



$$\arg = \frac{3\pi}{2}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$$

$$5) z = 1 + i \quad (1, 1)$$



برای بدست آوردن $\arg$ در میان محور مختصات این فرمول

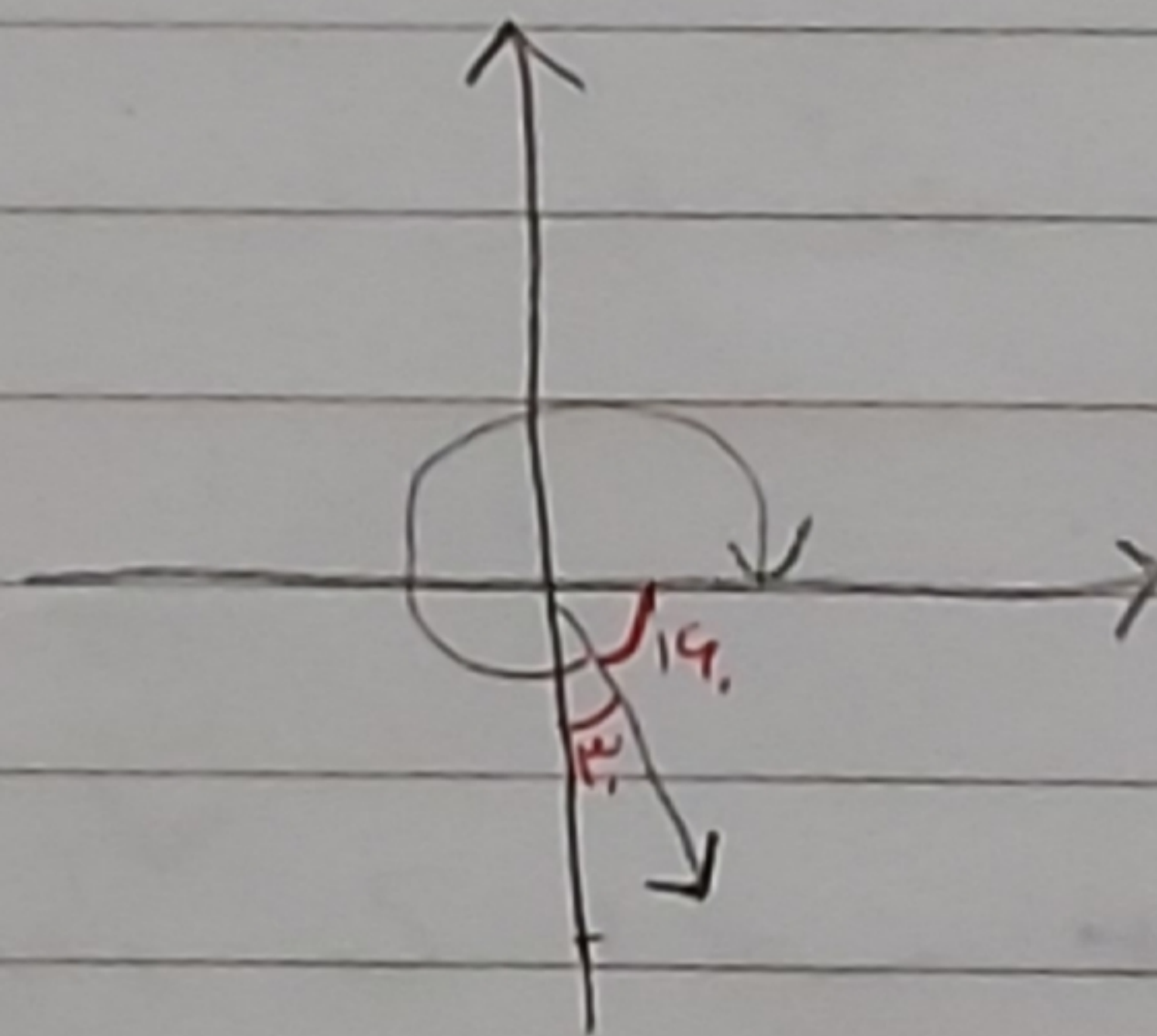
$$\arg(a + ib) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

مقابل $\rightarrow$
مجاور $\rightarrow$

زاویه	0	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°
$\tan$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	تقریب نشده	0	X	0

$$4) z = 1 - \sqrt{3}i = (1, -\sqrt{3})$$

$$\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$$



$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$$

مهرم مثلثاتی اعداد مختلف

برای نوشتن مهرم مثلثاتی اعداد مختلف از جدول زیر استفاده می کنیم

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

اندازه

زاویه

$$|z| = \sqrt{(\text{مخت صاف})^2 + (\text{مخت عمودی})^2}$$

$$\sqrt{2} = 1,41$$

$$\sqrt{3} = 1,73$$

$$\sqrt{5} = 2,24$$

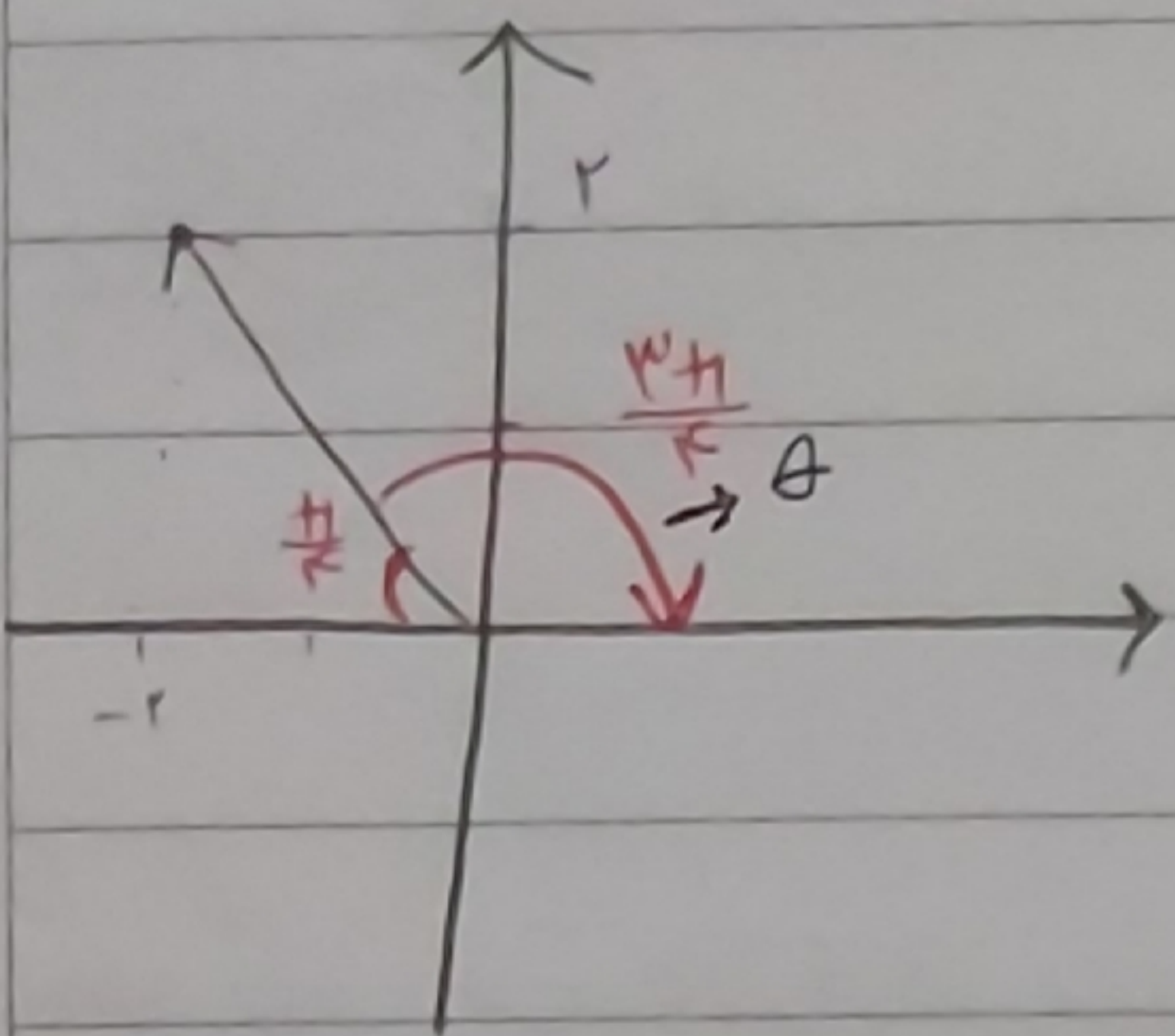
$$\sqrt{6} = 2,45$$

فرم مستطانی اعداد مختلف زیر را بنویس

انرازه

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8}$$

$$1) z = -2 + 2i$$



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

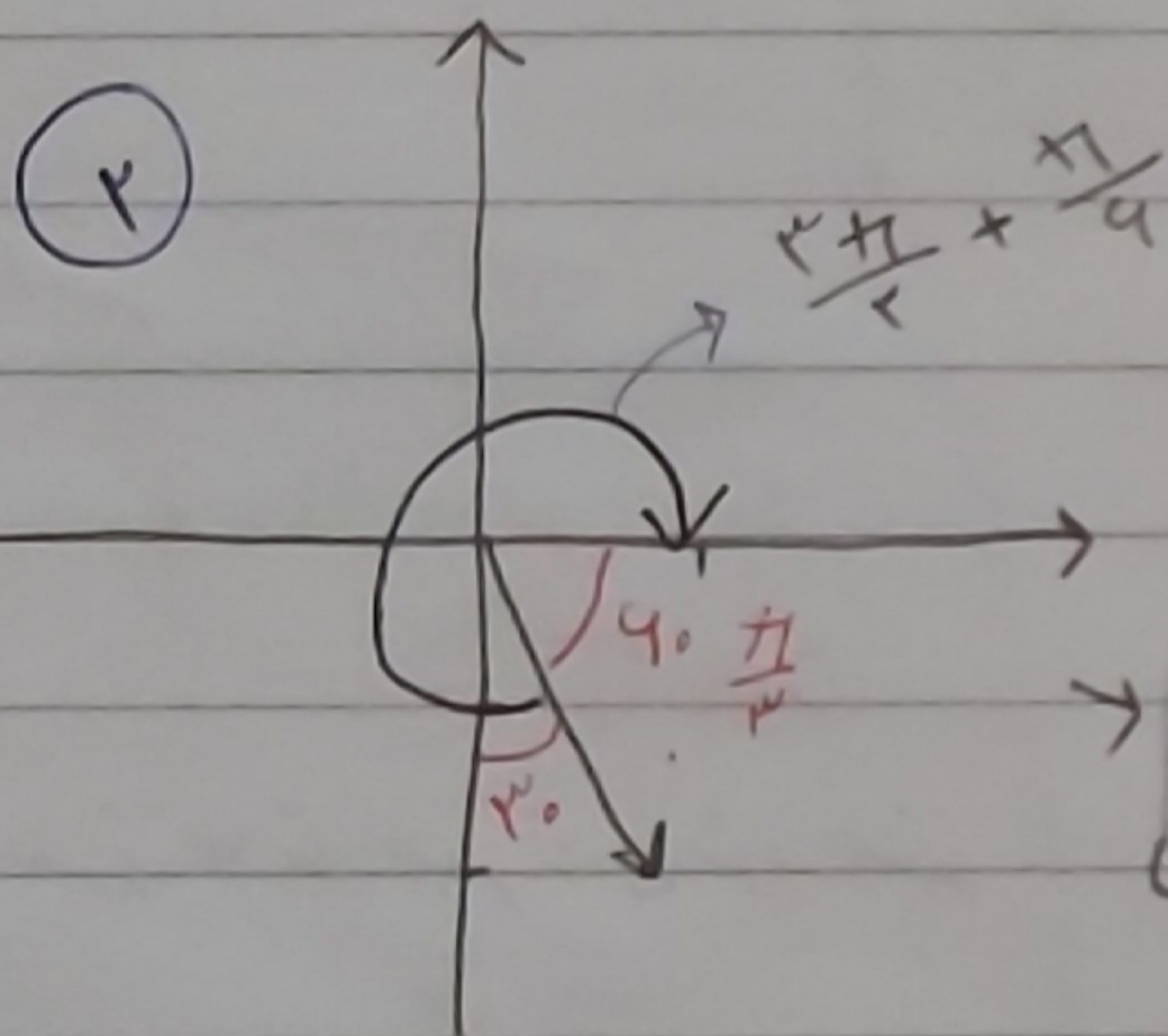
به سمت عقاربهارم

$$\text{فرم مستطانی} \rightarrow z = \sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

جواب ←

$$2) z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad (1)$$



(2)

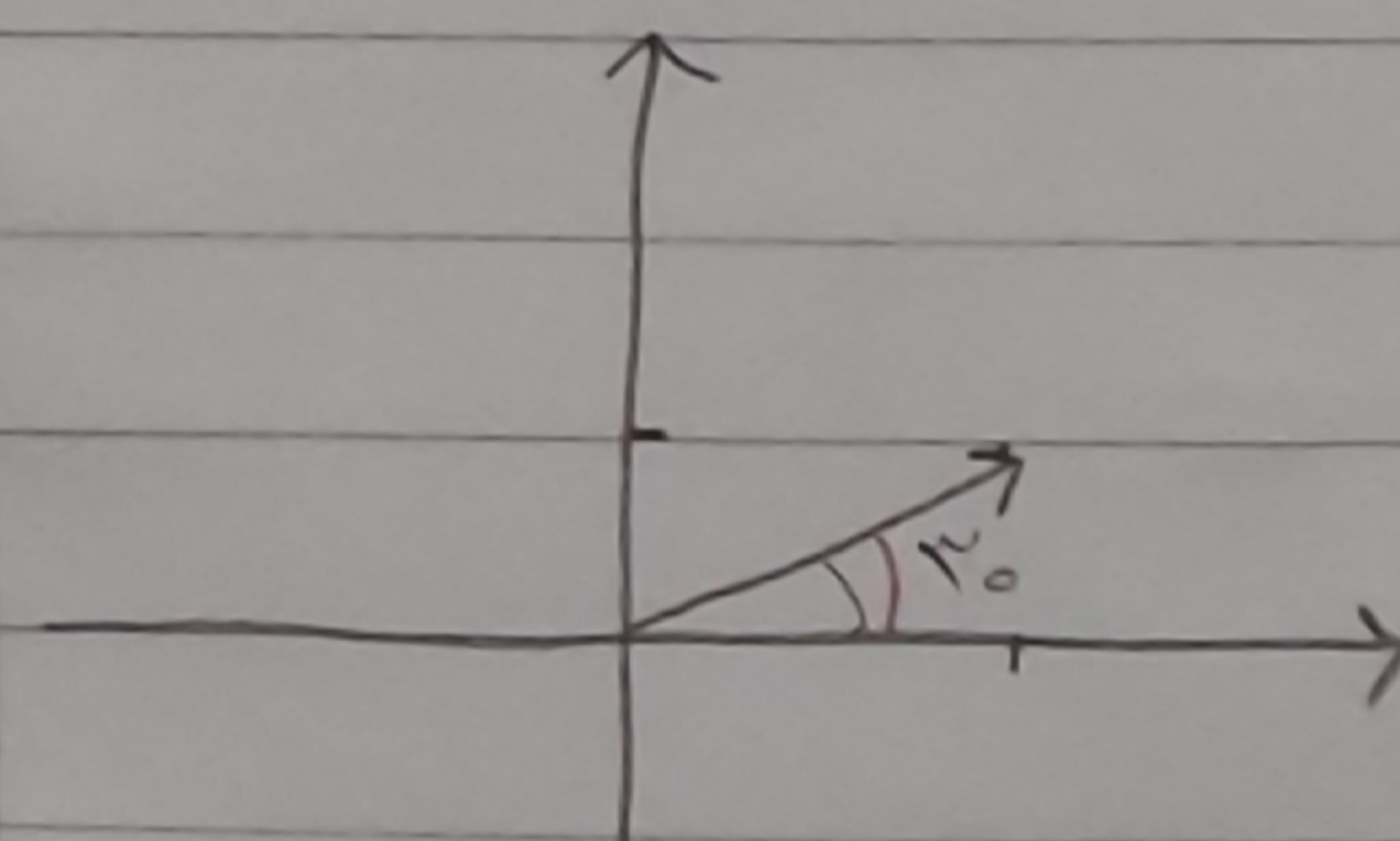
$$\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

چرا اینجایی tan می شود sqrt 3؟ درم

$$\rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \quad \text{جواب} \leftarrow$$

$$3) z = \sqrt{3} + i$$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2 \quad \checkmark$$



کوینورد

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

هر وقت بر دار افتد روی خاصه اول فقط طبق جدول می رویم که خاصه دهم بود. هیچ خاصه

می بینیم و غیره جدول مدافع می کنیم

توان اعداد مختلط

مثال

هرگاه بخواهیم z^n را حساب کنیم با داشتن z فرم مختلط به راحتی این کار انجام می شود که به صورت زیر است:

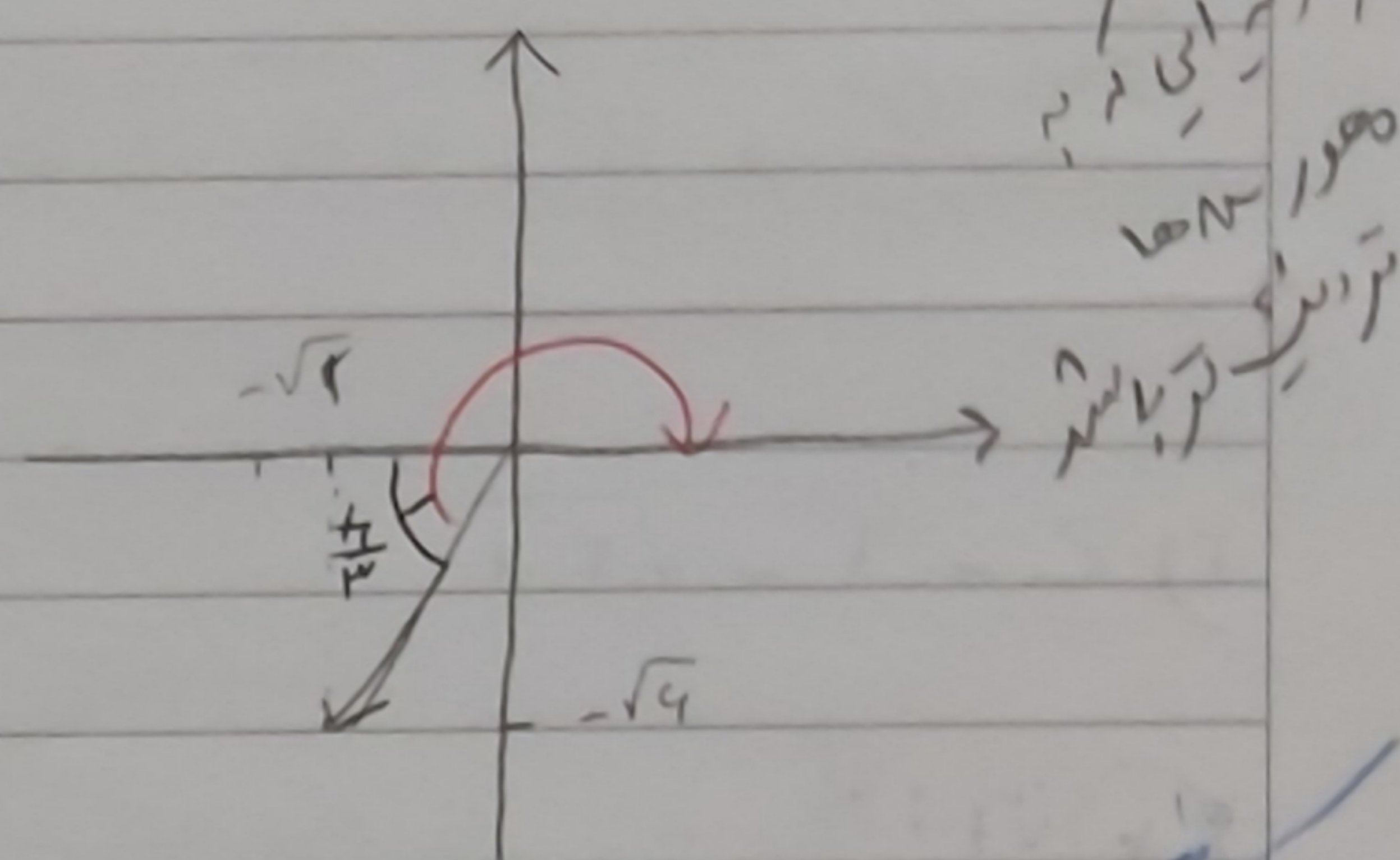
$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \leftarrow$$

کافیست مقدار z و θ را بدانیم

$$1) z = (-\sqrt{2} - \sqrt{4}i)^9$$

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{4})^2} = \sqrt{6}$$

$$\arctan\left(\frac{-\sqrt{4}}{-\sqrt{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \rightarrow 45^\circ$$



$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$z^9 = (\sqrt{6})^9 \left(\cos \frac{9 \times 5\pi}{4} + i \sin \frac{9 \times 5\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow z^9 = (\sqrt{6})^9$$

$$\sin \pi = 0$$

$$\sin 2\pi = 0$$

یعنی ۱۲ صفر می شود صفر

$$\cos \pi = -1$$

$$2\pi = 1$$

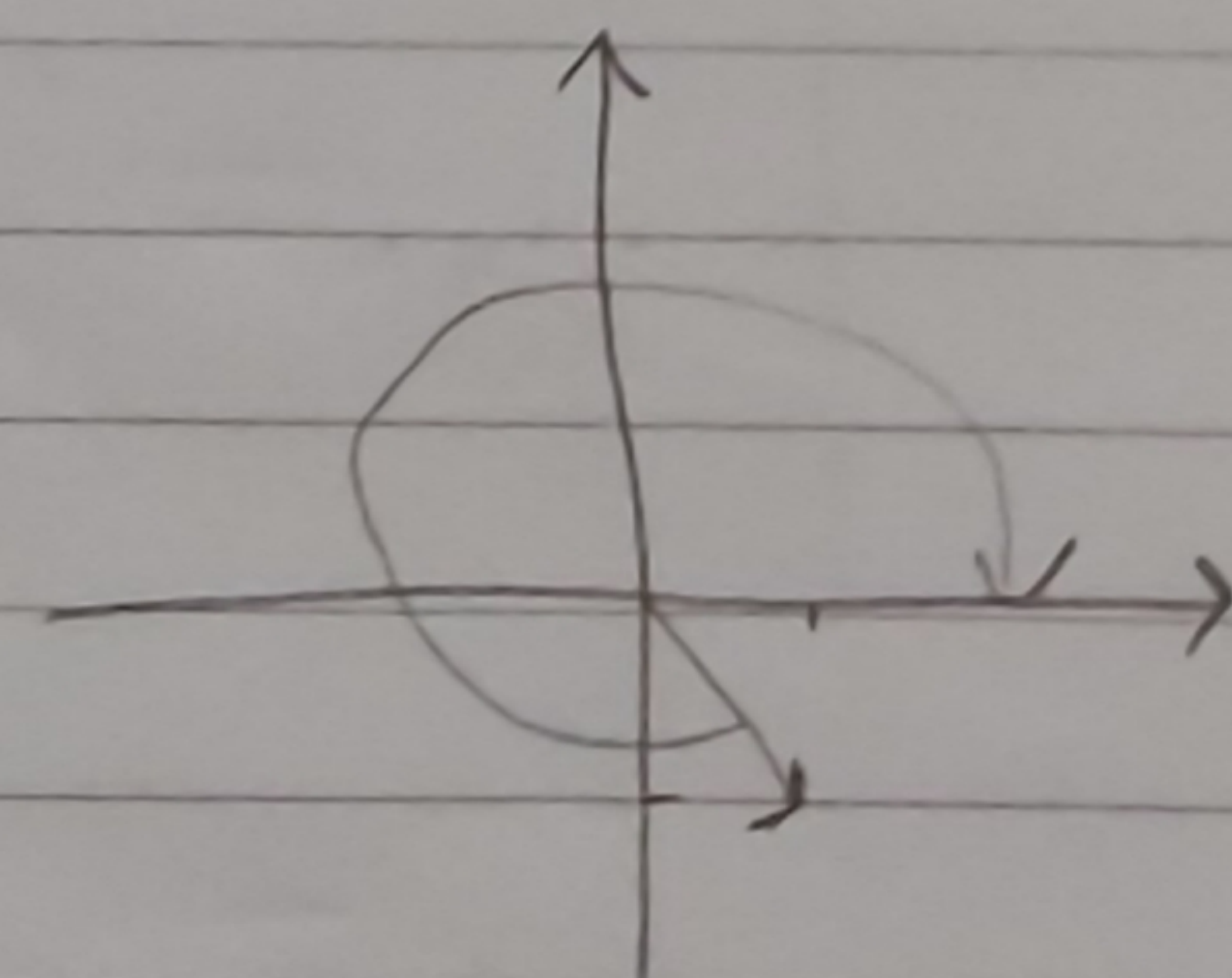
$$\cos 3\pi = -1$$

$$4\pi = 1$$

$$2) z = (1 - i)^{14}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan -1 = \frac{7\pi}{4}$$



$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

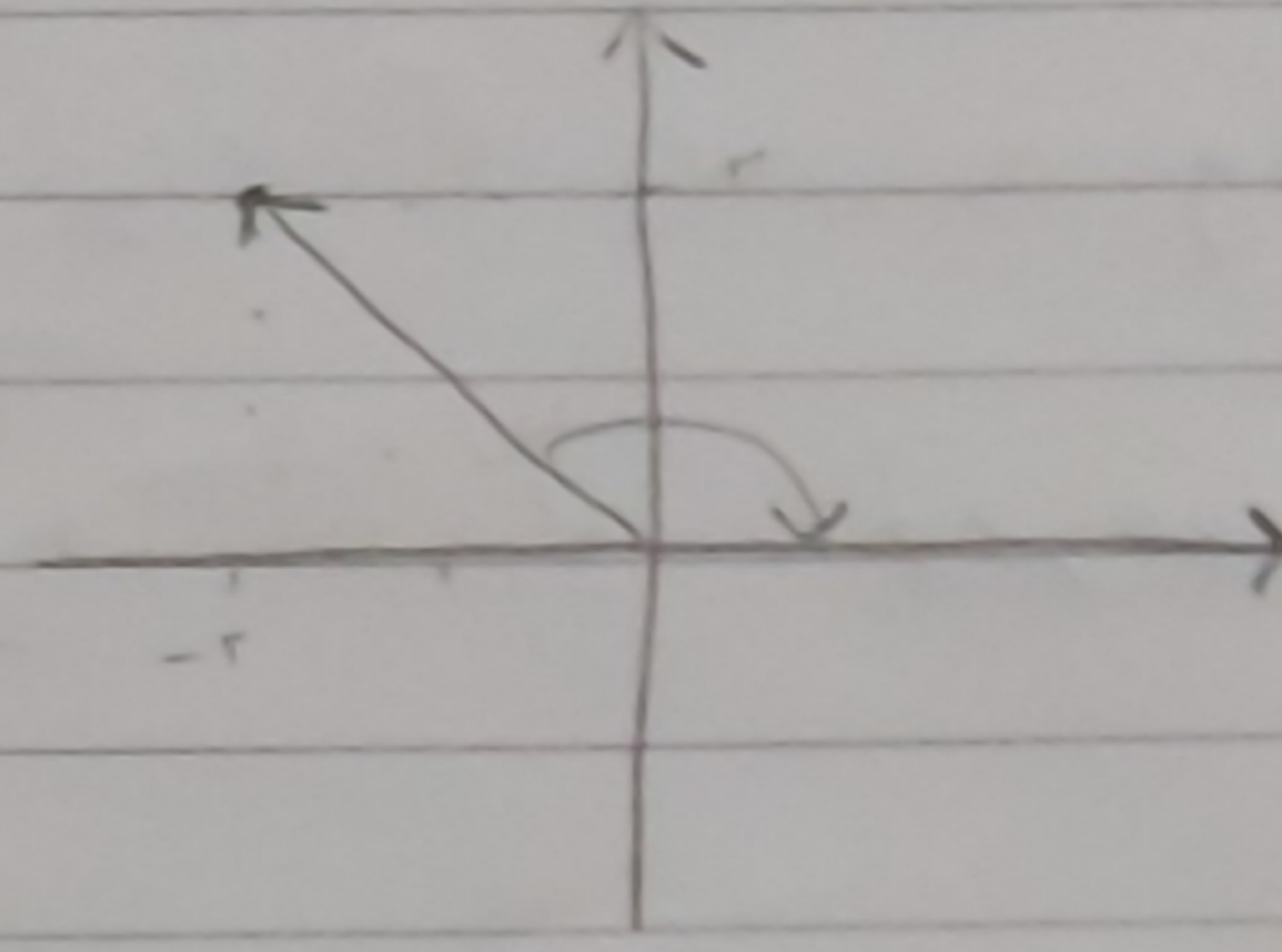
$$z^{14} = (\sqrt{2})^{14} \left(\cos 14 \times \frac{7\pi}{4} + i \sin 14 \times \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$z^{14} = (\sqrt{2})^{14}$$

$$2) z = (-r + ri)^k$$

$$|z| = \sqrt{(-r)^2 + r^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}$$

$$\arctan\left(\frac{r}{-r}\right) = \frac{\pi}{k}$$



$$\theta = \frac{\pi}{r} + \frac{\pi}{k} = \frac{r\pi + \pi}{k} = \frac{r\pi}{k}$$

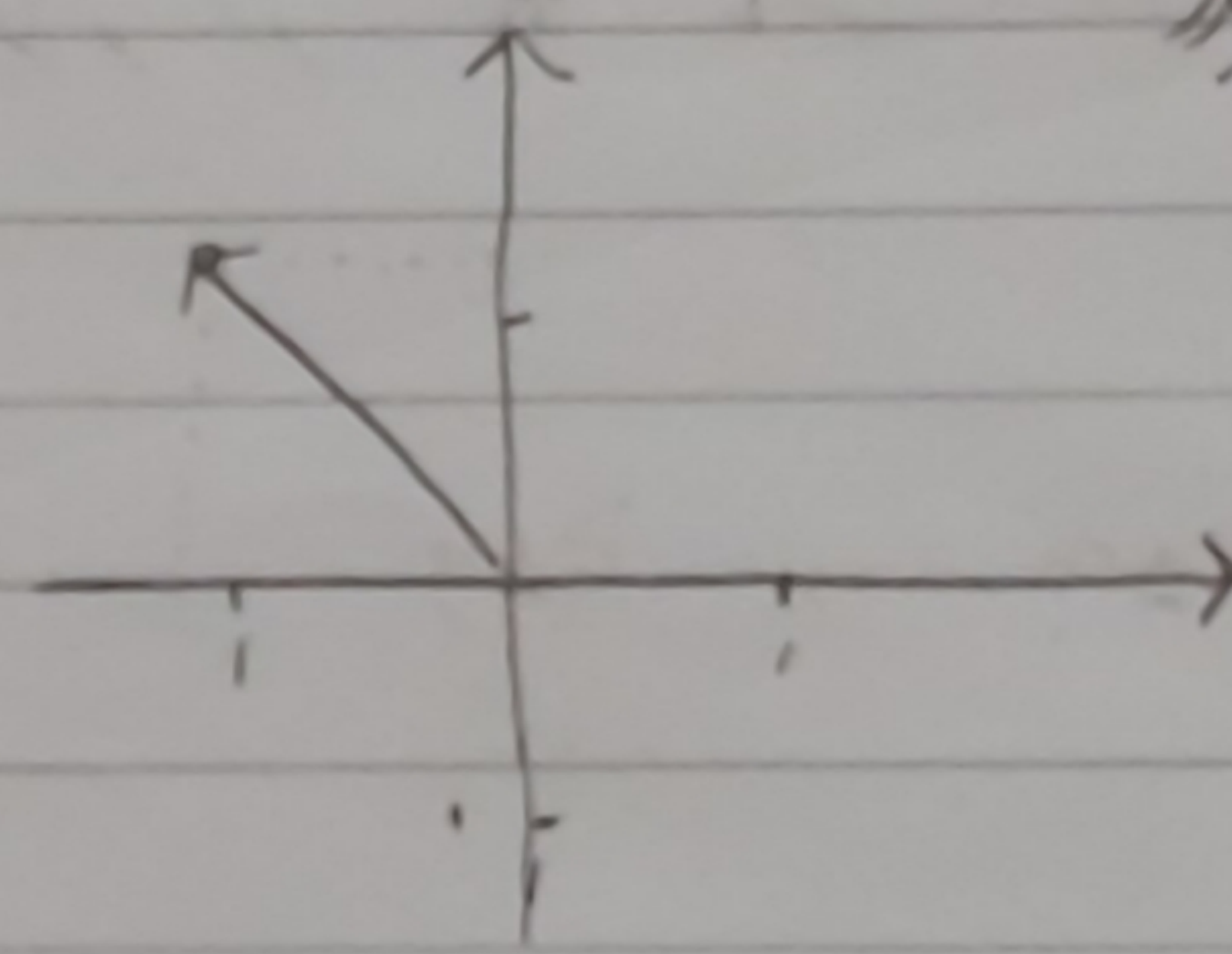
$$z^k = (\sqrt{2})^k \left(\cos \frac{r\pi}{k} + i \sin \frac{r\pi}{k} \right) \Rightarrow z^k = (\sqrt{2})^k \times -1 = -(\sqrt{2})^k$$

$$3) z = (-\sqrt{r} + \sqrt{r}i)^{14}$$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{r})^2 + (\sqrt{r})^2} = \sqrt{2}$$

توان ۲ و توان ۱۴ و توان ۱۴ و توان ۱۴

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{r}}{-\sqrt{r}}\right) = \frac{\pi}{k}$$



$$\theta = \frac{\pi}{r} + \frac{\pi}{k} = \frac{\pi + r\pi}{k} = \frac{r\pi}{k}$$

$$z^{14} = (\sqrt{2})^{14} \left(\cos \frac{r\pi}{k} + i \sin \frac{r\pi}{k} \right) \Rightarrow z^{14} = (\sqrt{2})^{14}$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

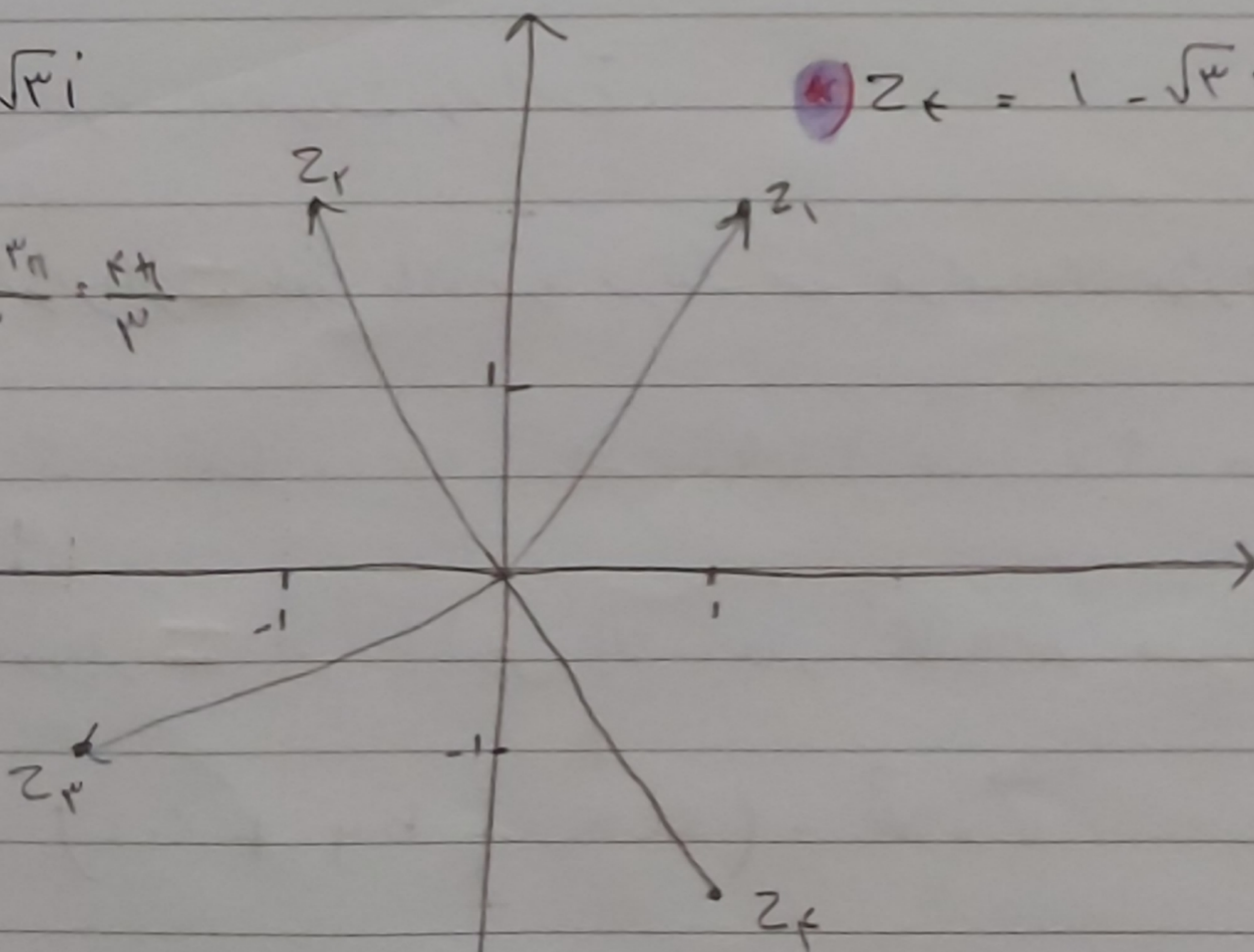
$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z_4 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\theta = \frac{-\pi}{3} + \pi = \frac{\pi + r\pi}{k} = \frac{r\pi}{k}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi - \pi}{3} = \frac{3\pi}{3}$$



محل جابج

بارد خفی جهت دار که دارای اندازه باشد بردارها را با خردی چون $\vec{v}$ w u y نمایش می دهند

برای نشان دادن یک بردار در فضای $\mathbb{R}^2$ از نمایش $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$ و در فضای $\mathbb{R}^3$

$\vec{w} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ استفاده می شود.

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

به بردارها از $\hat{k}$ بردار یکگانه چون $\perp$ است. عبارت انداز

احمال روی بردارها

فرض کنید $\vec{v} = (a, b, c)$ و $\vec{w} = (u, y, z)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند. آنها جمع و تفریق آنها

اینگونه است:

$$\vec{v} + \vec{w} = (a+u, b+y, c+z)$$

$$1) \vec{v} = 2\hat{i} - 3\hat{j} \quad \vec{w} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (2, -3, 0) + (5, -4, 3) = (7, -7, 3)$$

$$\vec{v} - \vec{w} = (2, -3, 0) - (5, -4, 3) = (-3, 3, -3)$$

با فرض بالا ضرب به صورت زیر است:

① ضرب عدد در بردار: عدد داده شده در تک تک مؤلفه های بردار ضرب می شود.

$$2) \vec{v} = (4, -1, 2) = 3\vec{v} = 3(4, -1, 2) = (12, -3, 6)$$

② ضرب داخلی دو بردار: اگر با فرض بالا عدد مؤلفه ضرب در همان مؤلفه می شود و بر می آید

$$\vec{v} = (a, b, c) \quad \vec{w} = (u, y, z) \quad \text{عدد} = a u + b y + c z$$

$$\vec{w} = (u, y, z)$$

$$3) \vec{V} = (1, -4, 3)$$

$$\vec{W} = (2i - 5j - 2k)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = (1, -4, 3) \cdot (2, -5, -2) = (1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + -4 \cdot -2) = 14$$

۳ ضرب خارجی دو بردار: با فرض بالا ضرب خارجی اینگونه است

$$\vec{V} = (a, b, c)$$

$$\vec{W} = (m, y, z)$$

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ m & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (bz - cy)i - (az - cm)j + (ay - bm)k = \text{بردار}$$

$$\vec{V} = 2i + 3j - 5k$$

$$\vec{W} = i - j + 2k$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (9 - 5)i - (4 + 10)j + (-2 - 3)k = 4i - 14j - 5k$$

ماتریس ها

تعدادی از اعداد و حروف که باید نظام خاص در سطرها و ستونها قرار گیرد
ماتریس را شش می دهند

ماتریس ها با حروف بزرگ انگلیسی را نشان می دهند
به هر صف ماتریس یک درجه گویند

انواع ماتریس

۱ ← مربعی : ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن با هم برابر است مثل

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

۲ ← قطری : ماتریسی است مربعی که تمام درجه های غیر صفر روی قطر اصلی است

به عبارت دیگر خارج از قطر اصلی همه صفر است

مربعی

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

۳. سطر : ماتریس که فقط یک سطر و تعدادی ستون دارد

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

۴. ستونی : ماتریس که فقط یک ستون و تعدادی سطر دارد

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

۵. بالایی : ماتریس مربعی که درایه‌های بالای قطر اصلی غیر صفر است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

۶. پایینی : ماتریس مربعی که تمام درایه‌های پایینی قطر اصلی غیر صفر باشد

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

مشت با غیر صفرها ساخته می‌شود !!

۷. ماتریس همبانی : ماتریس مربعی که به غیر از قطر اصلی همه درایه‌ها صفر است و فقط روی قطر اصلی ۱ است

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان

دترمینان یک ماتریس ^{مربعی} عددی است که به آن ثبت داده می‌شود.

دترمینان یک ماتریس به چند روش است که راحت‌ترین آن روش ساروس می‌باشد. در این روش

برای یک ماتریس $n \times n$ ، ستون اول ماتریس را کنار آن می‌گذاریم و سپس

مجموع حاصل ضرب قطرهای اصلی را از مجموع حاصل ضرب قطرهای عکسی کم می‌کنیم به عنوان مثال

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (9 + 0 + 10) - (-2 + (-15) + 0) = 19 + 17 = 33$$